AL TREILEA BARAJ PENTRU JBMO - Arabia Saudită, 2017

Problema 1. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a(a-b^2)}{a+b^2} + \frac{b(b-c^2)}{b+c^2} + \frac{c(c-a^2)}{c+a^2} \geq 0.$$

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule (p, q) pentru care ecuaţiile $x^2 - px + q = 0$ şi $x^2 - qx + p = 0$ au soluţii întregi.

Problema 3. Fie BC o coardă a cercului (O) care nu este diametru. Fie $[AE]$ diametrul perpendicular pe BC astfel încât A aparţine arcului mare $\widehat{BC}$ al lui (O). Fie D un punct pe arcul mare $\widehat{BC}$ al lui (O), diferit de A. Dreapta AD intersectează BC în S, iar DE intersecteează BC at T. Fie F mijlocul lui $[ST]$ şi I al doilea punct de intersecţie dintre cercul circumscris triunghiului ODF şi dreapta BC.
1. Fie M şi N punctele în care paralela prin I la OD intersectează AD, respectiv DE. Aflaţi valoarea maximă a ariei triunghiului MDN atunci când D se mişcă pe arcul mare $\widehat{BC}$ al cercului (O) (astfel încât $D \neq A$).
2. Demonstraţi că perpendiculara din D pe ST trece prin mijlocul lui $[MN]$.

Problema 4. Se consideră o mulţime S formată din 200 de puncte ale planului astfel încât 100 dintre aceste puncte sunt vârfurile unui poligon convex A, iar celelalte 100 de puncte sunt în interiorul poligonului. În plus, nicicare 3 dintre punctele considerate nu sunt coliniare.
O *triangularizare* este o partiţionare (împărţire în submulţimi disjuncte) a interiorului poligonului A în triunghiuri obţinută unind prin segmente unele dintre punctele din S astfel încât nicicare două din segmentele trasate să nu se intersecteze (decât eventual la capete) şi astfel încât fiecare din punctele din S este vârf al cel puţin unui triunghi.
1. Demonstraţi că numărul segmentelor trasate nu depinde de triangularizare.
2. Arătaţi că, pentru orice triangularizare, putem colora fiecare triunghi cu una din trei culori astfel încât oricare două triunghiuri care au o latură comună să aibă culori diferite.

Soluţii:

Problema 1. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a(a-b^2)}{a+b^2} + \frac{b(b-c^2)}{b+c^2} + \frac{c(c-a^2)}{c+a^2} \geq 0.$$

Soluţie:

Avem $\dfrac{a(a-b^2)}{a+b^2} = \dfrac{a(a+b^2)-2ab^2}{a+b^2} = a - \dfrac{2ab^2}{a+b^2} \leq a - \dfrac{2ab^2}{2\sqrt{a}\,b} = a - b\sqrt{a}$. Analog, $\dfrac{b(b-c^2)}{b+c^2} \leq b - c\sqrt{b}$ şi $\dfrac{c(c-a^2)}{c+a^2} \leq c - a\sqrt{c}$. Astfel, este suficient să demonstrăm că

$$a + b + c \geq b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}.$$

Conform inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, avem

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq \left(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}\right)^2.$$

Aşadar, este suficient să demonstrăm că

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Această inegalitate rezultă din

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \geq (a + b + c)(ab + bc + ca).$$

(Din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică rezultă $a + b + c \leq 3$.)
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

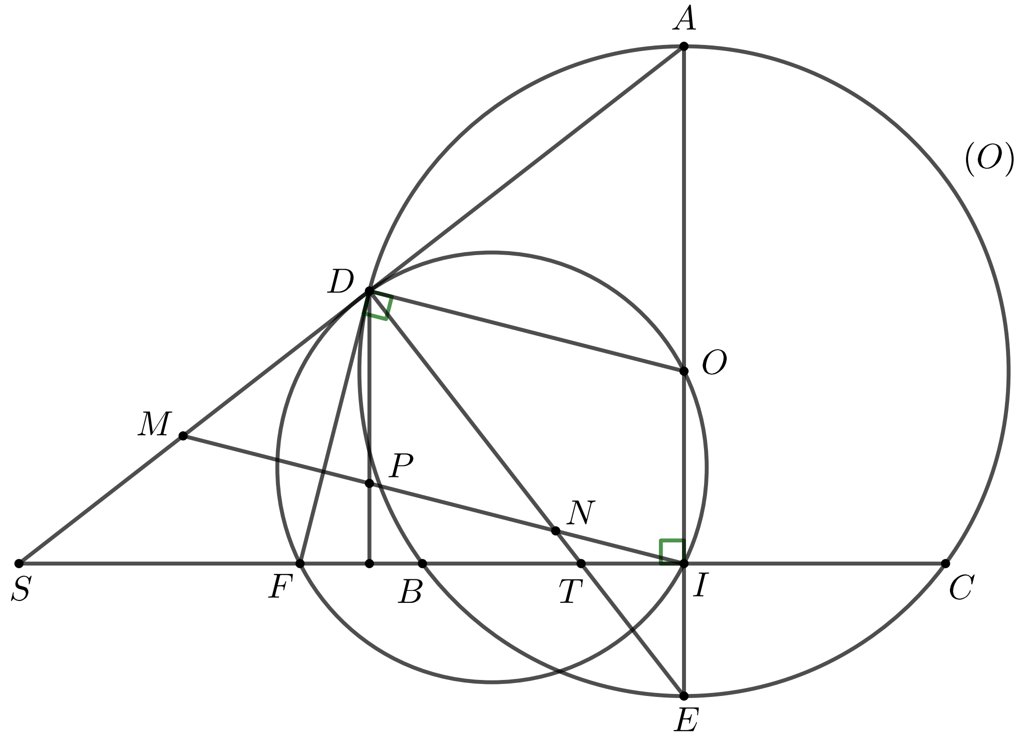
Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule (p, q) pentru care ecuaţiile $x^2 - px + q = 0$ şi $x^2 - qx + p = 0$ au soluţii întregi.

Soluţie:
Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ soluţiile ecuaţiei $x^2 - px + q = 0$. Atunci $a + b = p$ şi $ab = q$, deci $a, b > 0$. Aşadar, $(a-1)(b-1) \geq 0$, adică $p - q + 1 \geq 0$.
Analog, din cealaltă ecuaţie rezultă că $q - p + 1 \geq 0$, deci $p - q \in \{-1, 0, 1\}$.
• Dacă $p = q$, ecuaţia $x^2 - px + p = 0$ trebuie să aibă soluţii întregi. Asta înseamnă că $\Delta = p^2 - 4p$ trebuie să fie pătrat perfect. Dar $p^2 - 4p = k^2 \Leftrightarrow (p-2)^2 - k^2 = 4 \Leftrightarrow (p-2-k)(p-2+k) = 4$. Observăm că $p - 2 - k$ şi $p - 2 + k$ au aceeaşi paritate, deci singura posibilitate este $p - 2 - k = p - 2 + k = 2$, adică $p = 4$. Într-adevăr, pentru $p = 4$, soluţiile lui $x^2 - px + p = 0$ sunt ambele egale cu 2, deci întregi.
• Dacă $p = q + 1$, ecuaţia $x^2 - px + q = 0$ are soluţiile întregi 1 şi q. Ecuaţia $x^2 - qx + p = 0$, care devine $x^2 - qx + q + 1 = 0$, trebuie să aibă soluţii întregi.

Ca mai sus, $\Delta = q^2 - 4q - 4 = k^2 \Leftrightarrow (q-2-k)(q-2+k) = 8 \Leftrightarrow q-2-k = 2,\ q-2+k = 4 \Rightarrow q = 5$. Obţinem $(p, q) = (6, 5)$ care satisface într-adevăr condiţia.
• Analog, dacă $p - q = -1$ obţinem perechea $(p, q) = (5, 6)$.
În concluzie, există trei perechi convenabile: $(4, 4)$, $(5, 6)$ şi $(6, 5)$.

Problema 3. Fie BC o coardă a cercului (O) care nu este diametru. Fie $[AE]$ diametrul perpendicular pe BC astfel încât A aparţine arcului mare $\widehat{BC}$ al lui (O). Fie D un punct pe arcul mare $\widehat{BC}$ al lui (O), diferit de A. Dreapta AD intersectează BC în S, iar DE intersecteează BC at T. Fie F mijlocul lui $[ST]$ şi I al doilea punct de intersecţie dintre cercul circumscris triunghiului ODF şi dreapta BC. (O este centrul cercului (O).)
1. Fie M şi N punctele în care paralela prin I la OD intersectează AD, respectiv DE. Aflaţi valoarea maximă a ariei triunghiului MDN atunci când D se mişcă pe arcul mare $\widehat{BC}$ al cercului (O) (astfel încât $D \neq A$).
2. Demonstraţi că perpendiculara din D pe ST trece prin mijlocul lui $[MN]$.

Soluţie:



1. Mai întâi, să observăm că $m(\angle ADE) = 90°$, deci DO şi DF sunt mediane în triunghiurile ADE, respectiv SDT.
Atunci $m(\angle ODF) = m(\angle ODT) + m(\angle FDT) = m(\angle OET) + m(\angle FTD) = 90°$.
Atunci $m(\angle OIF) = 180° - m(\angle ODF) = 90°$, ceea ce arată că I este mijlocul lui $[BC]$. Deoarece triunghiul ODE este isoscel, rezultă că triunghiurile INE şi IMA sunt de asemenea isoscele, ceea ce implică $IE = IN$ şi $IM = IA$. Aşadar

$MN = IM - IN = IA - IE = const.$
Cum triunghiurile DMN şi DAE sunt asemenea, cu raportul de asemănare constant, rezultă că, pentru a maximiza aria lui DMN, trebuie să maximizăm aria triunghiului ADE. Avem

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} DA \cdot DE \leq \frac{DA^2 + DE^2}{4} = \frac{AE^2}{4}.$$

Egalitatea are loc atunci când $DA = DE$, adică D este pe cerc astfel încât ADE este dreptunghic isoscel.
2. Dacă P este mijlocul lui $[MN]$, atunci

$$\angle PDN \equiv \angle PND \equiv \angle INE \equiv \angle IEN,$$

deci $DP \parallel AE$, adică perpendiculara din D pe ST trece prin mijlocul lui $[MN]$.

Problema 4. Se consideră o mulţime S formată din 200 de puncte ale planului astfel încât 100 dintre aceste puncte sunt vârfurile unui poligon convex A, iar celelalte 100 de puncte sunt în interiorul poligonului. În plus, nicicare 3 dintre punctele considerate nu sunt coliniare.
O *triangularizare* este o partiţionare (împărţire în submulţimi disjuncte) a interiorului poligonului A în triunghiuri obţinută unind prin segmente unele dintre punctele din S astfel încât nicicare două din segmentele trasate să nu se intersecteze (decât eventual la capete) şi astfel încât fiecare din punctele din S este vârf al cel puţin unui triunghi.
1. Demonstraţi că numărul segmentelor trasate nu depinde de triangularizare.
2. Arătaţi că, pentru orice triangularizare, putem colora fiecare triunghi cu una din trei culori astfel încât oricare două triunghiuri care au o latură comună să aibă culori diferite.

Soluţie:
1. Să presupunem că avem k triunghiuri într-o anumită triangularizare. Calculând suma măsurilor tuturor unghiurilor acestor triunghiuri obţinem $180° \cdot k$.
Sumă măsurilor unghiurilor interioare ale poligonului A este $180° \cdot 98$.
Suma măsurilor unghiurilor din jurul celor 100 de puncte situate în interiorul lui A este $360° \cdot 100$.
Aşadar, avem

$$180° \cdot k = 180° \cdot 98 + 360° \cdot 100 \Leftrightarrow k = 298.$$

Fiecare triunghi are 3 laturi, iar 100 dintre aceste laturi sunt laturile lui A. Să mai remarcăm că fiecare segment interior este numărat la două triunghiuri, deci numărul de segmente la fiecare triangularizare este

$$\frac{3 \cdot 298 - 100}{2} + 100 = 497.$$

2. Demonstrăm că pentru orice poligon cu n vârfuri conţinând m puncte în interiorul său astfel încât nicicare trei dintre aceste $m + n$ puncte să nu fie coliniare,

şi pentru orice triangularizare a acestuia, putem colora triunghiurile cu trei culori astfel încât oricare două triunghiuri care au o latură comună au culori diferite.
Demonstrăm această afirmaţie prin inducţie (tare) după numărul total de puncte, $m+n$.

Dacă $m+n=3$, atunci $n=3$ şi $m=0$, iar concluzia este evidentă.
Să presupunem afirmaţia adevărată pentru orice configuraţie cu mai puţin de $n+m$ puncte. Considerăm un poligon $A_1A_2\dots A_n$ având m puncte în interiorul său şi o triangularizare.
• Să presupunem că există un vârf A_k astfel încât $A_1A_2A_k$ este unul din triunghiurile triangularizării. Dacă $k=3$, poligonul $A_1A_3A_4\dots A_n$ este triangularizat şi, potrivit ipotezei de inducţie pentru cele $n+m-1$ puncte în total, poate fi colorat convenabil. Apoi, pentru triunghiul $A_1A_2A_3$ putem alege o culoare diferită de cea a triunghiului din triangularizare care îl are pe $[A_1A_3]$ drept latură.
Procedăm analog în cazul în care $A_k=A_n$. În cazurile rămase, considerăm poligoanele $A_2A_3\dots A_k$ şi $A_kA_{k+1}\dots A_1$. Ambele sunt triangularizate şi, potrivit ipotezei de inducţie, pot fi colorate convenabil. Putem în continuare găsi o culoare potrivită pentru triunghiul $A_1A_2A_k$, diferită de cea a triunghiurilor deja colorate care au $[A_1A_k]$ sau $[A_2A_k]$ drept latură.
• Trebuie să existe un punct X astfel încât triunghiul A_1A_2X este unul din triunghiurile triangularizării. Dacă X nu este unul din vârfurile poligonului, el trebuie să fie unul din cele m puncte interioare. În triangularizare, X trebuie să fie unit prin segmente de cel puţin trei puncte (printre acestea aflându-se A_1 şi A_2; suma măsurilor unghiurilor în jurul lui X trebuie să fie $360°$). Considerăm poligonul $P=A_1A_2B_1B_2\dots B_j$ determinat de punctele care sunt unite cu X. Atunci X este singurul puncte, dintre cele $n+m$, care este interior acestui poligon. Să îl ştergem acum pe X. Triangularizarea din interiorul lui P fiind astfel distrusă, considerăm o triangularizare arbitrară a lui P şi păstrăm restul triangularizării iniţiale (pentru exteriorul lui P). Obţinem o triangularizare pentru un poligon cu n vârfuri care are $m-1$ puncte în interior. Potrivit ipotezei de inducţie, putem colora convenabil triunghiurile acestei triangularizări. Acum îl punem pe X înapoi şi ne întoarcem la configuraţia iniţială. Păstrăm colorarea în exteriorul lui P (dacă există exterior) şi recolorăm interiorul conform triangularizării iniţiale. Trebuie să colorăm triunghiurile XA_2B_1, XB_1B_2, ... , XB_jA_1 şi XA_1A_2. Pentru XA_2B_1 avem cel mult o culoare interzisă (cea a triunghiului din exterior care are $[A_2B_1]$ drept latură (dacă un astfel de triunghi există). Pentru XB_1B_2 sunt cel mult două culori interzise, cea a triunghiului XA_2B_1 şi cea a eventualului triunghi din exterior care îl are pe $[B_1B_2]$ drept latură. Pentru fiecare din triunghiurile următoare sunt cel mult două culori interzise, deci mereu va exista cel puţin o culoare disponibilă. La sfârşit, pentru triunghiul XA_1A_2, avem o restricţie suplimentară: culoarea sa trebuie să fie diferită de cea a triunghiului XB_jA_1, dar şi de cea a triunghiului XA_2B_1. Din fericire, din exteriorul lui $[A_1A_2]$ nu ne vine nicio restricţie, aşa încât vom avea şi pentru acest triunghi o culoare disponibilă.
Aceasta încheie inducţia noastră.