BARAJUL 2 PENTRU JBMO - Arabia Saudită, 2017

Problema 1. Se dă un polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Se ştie că fiecare din ecuaţiile $f(x) = 1$ şi $f(x) = 2$ are patru rădăcini reale (nu neapărat distincte). Demonstraţi că dacă rădăcinile primei ecuaţii satisfac egalitatea $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, atunci aceeaşi egalitate este valabilă şi pentru rădăcinile celei de-a doua ecuaţii.

Problema 2. Spunem despre un număr natural $k > 1$ că este *drăguţ* dacă pentru orice pereche (m, n) de numere naturale nenule care satisfac condiţia $kn + m \mid km + n$ este adevărat că $n \mid m$.
1. Arătaţi că 5 este un număr drăguţ.
2. Determinaţi toate numerele drăguţe.

Problema 3. Fie (O) un cerc, iar BC o coardă în cercul (O) care nu este diametru. Fie A un punct pe arcul mare $\widehat{BC}$ al lui (O) şi fie E şi F picioarele perpendicularelor din B şi C pe AC, respectiv AB.
1. Arătaţi că tangentele în E şi F la cercul circumscris triunghiului AEF se intersectează într-un punct fix M atunci când A se mişcă pe arcul mare $\widehat{BC}$ al cercului (O).
2. Fie T intersecţia dintre EF şi BC şi fie H ortocentrul lui ABC. Demonstraţi că TH este perpendiculară pe AM.

Problema 4. Determinaţi numărul de moduri în care putem completa pătrăţelele unitate ale unei table de şah 8×8 cu cifre de 1 sau 2 astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie număr impar. (Două completări se consideră a fi diferite dacă există un pătrăţel în care numărul scris în prima completare diferă de numărul scris în a doua completare.)

Soluţii:

Problema 1. Se dă un polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Se ştie că fiecare din ecuaţiile $f(x) = 1$ şi $f(x) = 2$ are patru rădăcini reale (nu neapărat distincte). Demonstraţi că dacă rădăcinile primei ecuaţii satisfac egalitatea $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, atunci aceeaşi egalitate este valabilă şi pentru rădăcinile celei de-a doua ecuaţii.

Soluţie:
Considerăm ecuaţia $f(x) = 1$, sau $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 1$. Deoarece ea are patru rădăcini, x_1, x_2, x_3, x_4, o putem rescrie $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$. Atunci $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\dfrac{a}{2}$. Putem rescrie ecuaţia

$$\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right)\left(x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4\right) = 0$$

sau

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + x_1x_2\right)\left(x^2 + \frac{a}{2}x + x_3x_4\right) = 0.$$

Ecuaţia $f(x) = 2$ poate fi scrisă $\left(x^2 + \dfrac{a}{2}x + x_1x_2\right)\left(x^2 + \dfrac{a}{2}x + x_3x_4\right) = 1$. Notând $y = x^2 + \dfrac{a}{2}x$, obţinem $(y + x_1x_2)(y + x_3x_4) = 1$. Deoarece $f(x) = 2$ are patru rădăcini reale, această ecuaţie în y are două rădini reale, pe care le notăm $y = \alpha$ şi $y = \beta$. Rezultă că fiecare din ecuaţiile $x^2 + \dfrac{a}{2}x = \alpha$ şi $x^2 + \dfrac{a}{2}x = \beta$ are câte două soluţii. Deducem că cele patru soluţii, x_1', x_2', x_3', x_4', ale ecuaţiei $f(x) = 2$ pot fi împărţite în două perechi care au, ambele, suma egală cu $-\dfrac{a}{2}$, ceea ce înseamnă că $x_1' + x_2' = x_3' + x_4'$.

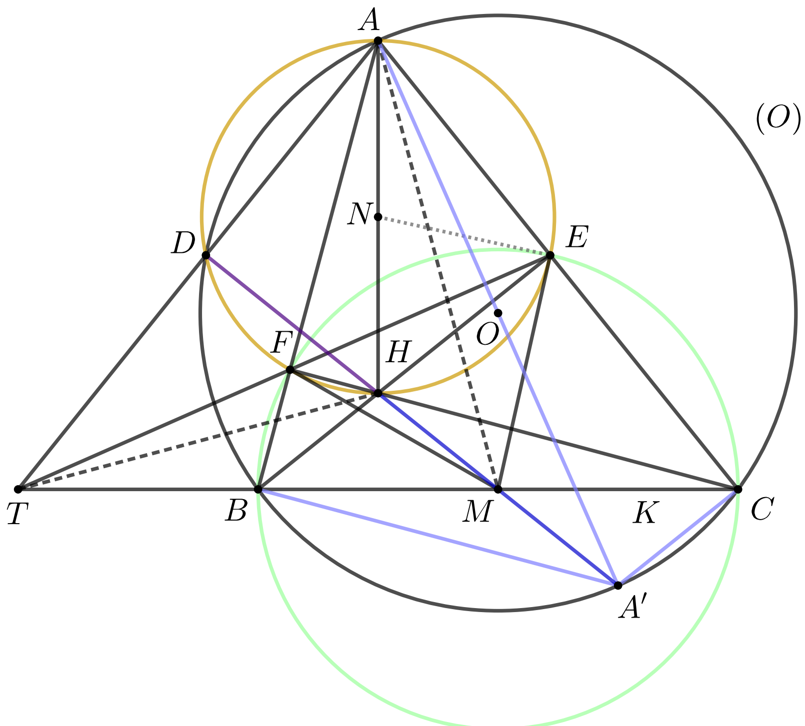
Problema 2. Spunem despre un număr natural $k > 1$ că este *drăguţ* dacă pentru orice pereche (m, n) de numere naturale nenule care satisfac condiţia $kn + m \mid km + n$ este adevărat că $n \mid m$.
1. Arătaţi că 5 este un număr drăguţ.
2. Determinaţi toate numerele drăguţe.

Soluţie:
1. Pentru $k = 5$, trebuie să arătăm că oricare ar fi m, n satisfăcând $5n+m \mid 5m+n$, avem $n \mid m$. Observăm că $5n+m \leq 5m+n$ înseamnă $n \leq m$, deci $1 \leq \dfrac{5m+n}{5n+m} < 5$. Atunci $A = \dfrac{5m+n}{5n+m} \in \{1, 2, 3, 4\}$. Considerăm cazurile:
- Dacă $A = 1$ atunci $m = n$.
- Dacă $A = 2$ atunci $5m + n = 10n + 2m$, adică. $m = 3n$.
- Dacă $A = 3$ atunci $5m + n = 15n + 3m$ şi $m = 7n$.
- Dacă $A = 4$ atunci $5m + n = 20n + 4m$, adică $m = 19n$.

Aşadar, în toate cazurile, avem $n \mid m$, ceea ce arată că $k = 5$ este un număr drăguţ.
2. Putem verifica direct că numărul $k = 2$ este drăguţ. Fie $k > 2$ un număr drăguţ.

Ca mai sus, rezultă că $n \leq m$ şi $1 \leq \dfrac{km+n}{kn+m} < k$. Astfel, $A = \dfrac{km+n}{kn+m} \in \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$. În cazul în care $A = 2$, avem $km + n = 2m + 2kn$, sau $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2k-1}{k-2}$. Trebuie să avem $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Z}$, adică $\dfrac{2k-1}{k-2} = 2 + \dfrac{3}{k-2} \in \mathbb{Z}$. Cum $k > 2$, rezultă că $k - 2 \in \{1, 3\}$, adică $k \in \{3, 5\}$. Este uşor de verificat că 3 este într-adevăr un număr drăguţ. În concluzie, singurele numere drăguţe sunt 2, 3 şi 5.

Problema 3. Fie (O) un cerc, iar BC o coardă în cercul (O) care nu este diametru. Fie A un punct pe arcul mare $\widehat{BC}$ al lui (O) şi fie E şi F picioarele perpendicularelor din B şi C pe AC, respectiv AB.
1. Arătaţi că tangentele în E şi F la cercul circumscris triunghiului AEF se intersectează într-un punct fix M atunci când A se mişcă pe arcul mare $\widehat{BC}$ al cercului (O).
2. Fie T intersecţia dintre EF şi BC şi fie H ortocentrul lui ABC. Demonstraţi că TH este perpendiculară pe AM.



Soluţie:
1. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Cum $m(\angle AEH) = m(\angle AFH) = 90°$, punctele A, H, E şi F se află pe un cerc, iar centrul acestui cerc este mijlocul, N, al lui $[AH]$. Este uşor de văzut că $NE = NH$ şi $ME = MB$, astfel că $m(\angle MEN) = m(\angle MEB) + m(\angle NEB) = m(\angle MBE) + m(\angle NHE) = m(\angle EAH) + m(\angle AHE) = 90°$.
Atunci ME este tangenta în E la cercul circumscris triunghiului AEF. Analog, FM este tangenta în F la acest cerc. Rezultă că tangentele în E şi F la cercul

circumscris triunghiului AEF se intersectează în punctul fix M.
2. Considerăm diametrul $[AA']$ al lui (O). Este uşor de văzut că $BHCA'$ este paralelogram şi că H, M şi A' sunt coliniare.
Presupunem că $MH \cap (O) \ni D \neq A'$. Atunci $m(\angle ADH) = m(\angle ADA') = 90°$, ceea ce înseamnă că D aparţine cercului circumscris triunghiului AEF.
Considerând axele radicale ale cercurilor circumscrise triunghiului ABC, patrulaterului $BFEC$ şi patrulaterului $AEHF$, avem că dreptele AD, EF şi BC sunt concurente în T, centrul radical al celor trei cercuri. În triunghiul ATM, avem $AH \perp TM$ şi $MH \perp AT$, deci H este ortocentrul acestui triunghi. De aici rezultă că $TH \perp AM$.

Problema 4. Determinaţi numărul de moduri în care putem completa pătrăţelele unitate ale unei table de şah 8×8 cu cifre de 1 sau 2 astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie număr impar. (Două completări se consideră a fi diferite dacă există un pătrăţel în care numărul scris în prima completare diferă de numărul scris în a doua completare.)

C. Năstăsescu

Soluţie:
Considerăm coloana cea mai din stânga şi linia cea mai de jos; colorăm toate pătrăţelele unitate de pe ele. Arătăm că, pentru orice completare cu numere 1 sau 2 a pătratului 7×7 rămas necolorat, putem alege convenabil, într-un unic mod, numerele din pătrăţelele colorate. Într-adevăr, dacă suma celor 7 numere de pe o linie sau coloană a pătratului 7×7 este pară (respectiv impară), completăm pătrăţelul colorat de pe respectiva linie sau coloană cu 1 (respectiv 2). Astfel, suma numerelor de pe fiecare din cele 7 linii şi 7 coloane pe care sunt pătrăţele necolorate va fi impară. În fine, numărul din colţul din stânga jos poate fi ales de aceeaşi paritate cu suma numerelor din pătratul 7×7. Astfel, atât suma numerelor de pe coloana colorată, cât şi cea a numerelor de pe linia colorată vor fi impare.
Deoarece putem completa fiecare din cele 49 de pătrăţele unitate ale pătratului 7×7 în 2 moduri, vom avea în total 2^{49} completări convenabile.