PROBLEME DE ANTRENAMENT PENTRU JBMO - Arabia Saudită, 2017

Problema 1. Pentru fiecare pereche de numere naturale nenule (x, y) se defineşte un număr natural $x\Delta y$. Se ştie că, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$, au loc egalităţile:
i. $(a+b)\Delta b = a\Delta b + 1$.
ii. $(a\Delta b) \cdot (b\Delta a) = 0$.
Aflaţi valorile expresiilor $2016\Delta 121$ şi $2016\Delta 144$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul (O) astfel încât punctele B, C sunt fixate, în vreme ce A se mişcă pe arcul mare $\overset{\frown}{BC}$ al lui (O). Tangentele în B şi C la (O) se intersectează în P. Cercul de diametru $[OP]$ intersectează AC şi AB în D, respectiv E. Demonstraţi că DE este tangentă unui cerc fix a cărui rază este jumătate din raza cercului (O).

Problema 3. Determinaţi toate perechile de numere prime (p, q) pentru care $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Problema 4. Fie $S = \{-17, -16, \ldots, 16, 17\}$. Spunem despre o submulţime T a lui S că este *bună* dacă $-x \in T$ oricare ar fi $x \in T$ şi dacă $x, y, z \in T$ (x, y, z pot fi şi egale) implică $x + y + z \neq 0$. Aflaţi numărul maxim de elemente al unei mulţimi bune.

Problema 5. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c = 6$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a^2b+16} + \frac{1}{b^2c+16} + \frac{1}{c^2a+16} \geq \frac{1}{8}.$$

Problema 6. Determinaţi toate perechile de numere prime (p, q) pentru care $p^2 + 5pq + 4q^2$ este pătrat perfect.

Problema 7. Fie ABC un triunghi înscris în cercul (O), având ortocentrul H. O dreaptă arbitrară d trece prin H şi intersectează (O) în P şi Q. Fie $[AA']$ un diametru al lui (O). Dreptele $A'P$ şi $A'Q$ intersectează BC în K, respectiv L. Demonstraţi că punctele O, K, L şi A' sunt conciclice.

Problema 8. O tablă de şah are 64 de pătrăţele colorate cu alb şi negru în modul obişnuit. Un *drum de nebun* este o succesiune de pătrăţele diferite cu proprietatea că oricare două pătrăţele consecutive au exact un punct în comun. Care este numărul minim de drumuri de nebun în care se poate descompune mulţimea tuturor pătrăţelelor albe?

Soluţie problema 5: Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{a^2b}{a^2b+16}+\frac{b^2c}{b^2c+16}+\frac{c^2a}{c^2a+16}\leq 1.$$

Dar $a^2b+16=a^2b+8+8\geq 3\sqrt[3]{a^2b\cdot 8\cdot 8}=12\sqrt[3]{a^2b}$, astfel că este suficient să demonstrăm că $\sum\frac{a^2b}{12\sqrt[3]{a^2b}}\leq 1$, adică $\sum\sqrt[3]{a^4b^2}\leq 12$. Aceasta rezultă adunând $3\sqrt[4]{a^4b^2}\leq a^2+ab+ab$ (inegalitatea mediilor) cu analoagele sale şi folosind că $(a+b+c)^2=36$.