Problema 1. Determinaţi toate numerele prime p pentru care $\frac{p+1}{2}$ şi $\frac{p^2+1}{2}$ sunt simultan pătrate perfecte.

Olimpiadă Germania, 1997

Soluţie: Arătăm că singurul număr prim cu această proprietate este $p = 7$.
Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{p+1}{2} = x^2$ şi $\frac{p^2+1}{2} = y^2$. Atunci $p+1 = 2x^2$, deci p este impar. De asemenea, p divide $2x^2-1$ şi $2y^2-1$, deci şi diferenţa lor, $2(y-x)(y+x)$. Cum p este impar, p divide $y-x$ sau $y+x$.
Cum $0 < y-x < p$ (deoarece $y < p$), prima variantă cade, deci p divide $x+y$.
Însă $x < y < p$ implică $0 < x+y < 2p$, deci trebuie ca $x+y = p$.
Atunci $p^2+1 = 2y^2 = 2(p-x)^2 = 2p^2 - 4px + 2x^2 = 2p^2 - 4px + p + 1$, de unde $p(p-4x+1) = 0$. Rezultă că $p+1 = 4x$, deci $2x^2 = 4x$, de unde $x = 2$. Rezultă că $p = 7$.
Pe de altă parte se vede că $p = 7$ satisface într-adevăr condiţiile din enunţ, numerele $\frac{p+1}{2} = 4$ şi $\frac{p^2+1}{2} = 25$ fiind într-adevăr pătrate perfecte.

Problema 2. Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Demonstraţi că

$$(x+1)(y+1)(z+1) \leq (x+y)(y+z)(z+x).$$

Soluţia 1: Vom folosi o variantă a inegalităţii lui Hölder, numită uneori şi inegalitatea lui Huygens:
dacă $a, x, y, z > 0$, atunci $(a+x)(a+y)(a+z) \geq (a + \sqrt[3]{xyz})^3$.
Demonstraţia este simplă: desfacem parantezele şi folosim că $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ şi $xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$.
Folosim din nou inegalitatea mediilor pentru a stabili că $\sqrt[3]{xyz} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 1$.
Cu acestea, deducem că $(x+1)^3 \leq (x+\sqrt[3]{xyz})^3 \leq (x+x)(x+y)(x+z)$ şi analoagele, inegalităţi care înmulţite implică $[(x+1)(y+1)(z+1)]^3 \leq 8xyz[(x+y)(y+z)(z+x)]^2$.
Dar $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$ (inegalitatea lui Cesáro, rezultă imediat prin înmulţirea inegalităţii evidente $2\sqrt{xy} \leq x+y$ cu analoagele ei) implică inegalitatea din enunţ.
Este uşor de văzut că egalitatea are loc dacă $x = y = z = 1$.

Soluţia 2: Notând $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, ştim că $a, b, c > 0$ satisfac $a+b+c = 3$. Inegalitatea de demonstrat revine la $abc(a+1)(b+1)(c+1) \leq$

$(a+b)(b+c)(c+a)$. Ori, tot cu inegalitatea mediilor, $abc(a+1)(b+1)(c+1) \leq abc\left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 = 8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$ ca mai sus.

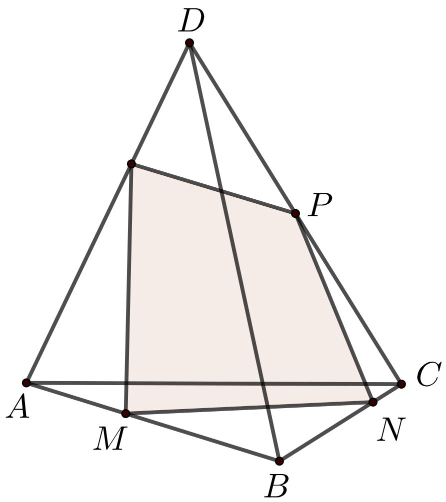
Problema 3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie 60 şi punctele M, N, P, Q aparţinând muchiilor (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) astfel încât $AM = 24$, $BN = 45$, $CP = 30$ şi $DQ = 20$. Dacă O este centrul triunghiului ABC, demonstraţi că punctele M, N, O, P, Q sunt coplanare.

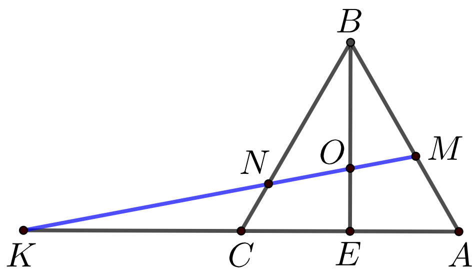
Constantin Petrea

Avem $MB = 60 - 24 = 36$, $NC = 15$, $PD = 30$, $QA = 40$, deci

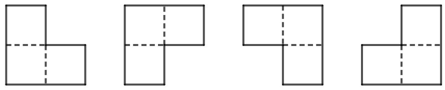
$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = \frac{24}{36} \cdot \frac{45}{15} \cdot \frac{30}{30} \cdot \frac{20}{40} = 1.$$

Conform reciprocei teoremei lui Menelaos în spaţiu, punctele M, N, P, Q sunt coplanare.
În continuare vom demonstra că $O \in MN$, deci şi punctul O aparţine acestui plan. Să observăm că $\frac{MA}{MB} \neq \frac{NC}{NB}$, deci $MN \nparallel AC$. Fie $\{K\} = MN \cap AC$. Din teorema lui Menelaous (în plan) aplicată triunghiului ABC tăiat de transversala $M-N-K$, avem $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{KA}{KC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$, deci $\frac{KA}{KC} = \frac{24}{36} \cdot \frac{45}{15} = 2$, adică $KA = 2KC$. Fie acum E mijlocul lui $[AC]$. Atunci $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{KA}{KE} \cdot \frac{OD}{OB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$, deci, conform reciprocei teoremei lui Menelaos (în plan) aplicată triunghiului ABE tăiat de transversala $M - O - K$ rezultă că punctele M, O, K sunt coliniare, adică $O \in MN$.





Problema 4. În câte moduri se pot colora pătrăţelele unitate ale unei table 2×7 cu verde sau cu galben astfel încât pe tablă să nu se formeze nicio *piesă* ,,L" complet verde sau complet galbenă. O *piesă* ,,L" este formată din 3 pătrăţele unitate şi are oricare din formele din figura de mai jos:



Concursul Náboj, 2016

Soluţie:
Dacă cele două pătrăţele ale unei coloane sunt colorate cu aceeaşi culoare, atunci, pentru a nu avea nicio piesă ,,L" monocoloră, trebuie ca pătrăţelele situate în coloanele vecine să fie colorate cu cealaltă culoare. Continuând raţionamentul, obţinem că, în acest caz, tabla trebuie să fie colorată cu 7 benzi verticale ale căror culori să alterneze. Acest lucru se poate face în două moduri (în funcţie de culoarea primei coloane). Pe lângă aceste colorări le avem pe acelea în care nu există două pătrăţele de aceeaşi culoare situate una peste alta. Toate aceste colorări convin deoarece orice piesă ,,L" conţine două pătrăţele de pe o aceeaşi coloană. Pentru fiecare din cele 7 coloane avem două moduri de a le colora (cu verdele sus şi galbenul jos sau invers). Astfel se vor obţine $2^7 = 128$ de colorări de acest fel.

În total sunt aşadar $2 + 128 = 130$ de colorări.