Programul upper.school de pregătire pentru JBMO

Simulare baraj 2

1 martie 2020

§1 Subiecte

Problema 1

a) Pe o tablă de șah cu 8 linii și 8 coloane sunt plasați 12 pioni. Arătați că putem selecta patru linii și patru coloane astfel încât toți pionii să se afle pe acestea.

b) Demonstrați că se pot plasa 13 pioni pe o tablă de șah cu 8 linii și 8 coloane astfel încât nicio selecție a patru linii și patru coloane să nu conțină toți pionii.
Notă: Nu este suficientă găsirea unui exemplu, este necesară argumentarea.

Problema 2

În triunghiul ascuțitunghic scalen ABC notăm cu H ortocentrul triunghiului și cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Paralela prin H la dreapta BC intersectează diametrul AO în punctul D. Notăm cu E punctul de intersecție al laturii BC cu diametrul AO. Perpendiculara în E pe dreapta AO intersectează dreapta AC în punctul F. Să se demonstreze că $DF \perp AB$.

Problema 3

Fie $a, b, c > 0$ astfel încât:

$$\frac{a+b^2}{a^2+b} \geq \frac{c+a^2}{c^2+a} \geq \frac{b+c^2}{b^2+c}$$

Demonstrați că $2(2b-1)^2 \geq (2a-1)^2 + (2c-1)^2$

Problema 4

a) Câte perechi de soluții naturale nenule (a,b) are ecuația $\frac{ab}{a+b} = n$, unde $n \in N^*$?

b) Fie $n \in N^*$. Fie a_n numărul de perechi (a,b) cu proprietatea că $\frac{ab}{a+b}$ este un divizor natural al lui n. Demonstrați că a_n este pătrat perfect.

Subiectele au fost selectate de Domnul Profesor Dinu Șerbănescu și Doamna Profesoară Lioara Ivanovici.
Timp de lucru: 4 ore.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Se punctează orice soluție corectă chiar dacă nu se regăsește în barem.