Problema săptămânii 189

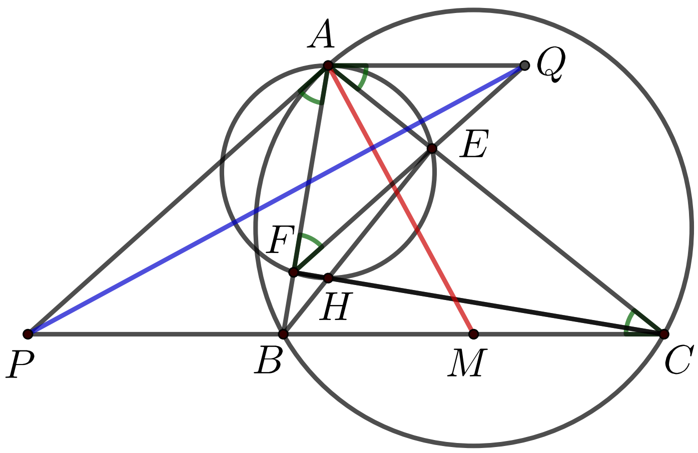
Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB < AC$. Fie E şi F picioarele înălţimilor din B, respectiv C, şi fie M mijlocul laturii $[BC]$. Tangenta în A la cercul circumscris lui ABC intersectează dreapta BC în P. Paralela prin A la dreapta BC taie dreapta EF în Q.

Demonstraţi că dreptele PQ şi AM sunt perpendiculare.

baraj Elveţia, 2019

Soluţia 1: Avem $\sphericalangle QAC \equiv \sphericalangle ACB$ (alterne interne), $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$ şi $\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle ACB$ (patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil). Deoarece centrul cercului circumscris triunghiului AFE se găseşte pe AH şi $AH \perp QA$, QA este tangentă la acest cerc. Din puterea punctului Q rezultă $QA^2 = QE \cdot QF$ (sau din asemănarea triunghiurilor AQF şi EQA). Analog (cu puterea punctului P faţă de cercul circumscris lui ABC sau cu asemănare), $PA^2 = PB \cdot PC$.

Considerând punctul A ca fiind un cerc de rază 0 cu centrul în A, relaţiile $QA^2 = QE \cdot QF$ şi $PA^2 = PB \cdot PC$ arată că punctele P şi Q au aceeaşi putere faţă de cercul A şi cercul circumscris patrulaterului $BCEF$, deci ambele se află pe axa radicală a celor două cercuri. Aşadar dreapta PQ este perpendiculară pe linia centrelor. Cum centrul cercului circumscris lui $BCEF$ este M, conchidem că $PQ \perp AM$.



Soluţia 2: (*Gabriel Turbincă, Ana Duguleanu*)

Plănuim să aplicăm următoarea lemă clasică:

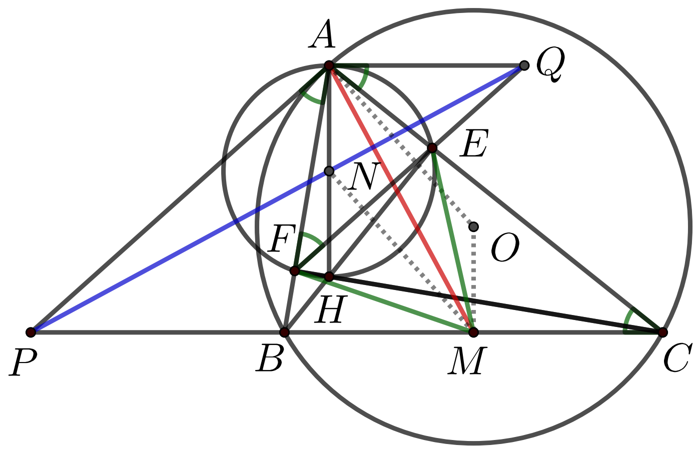
Lemă: Fie A, B, C, D patru puncte în plan (spaţiu). Atunci

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Din puterea punctului Q faţă de cercul de diametru $[BC]$, ca mai sus, avem $QA^2 = QE \cdot QF = QM^2 - MB^2$ (am folosit că puterea unui punct Q faţă de cercul de centru O şi rază R este $QO^2 - R^2$). Din puterea punctului P faţă de cercul circumscris, avem $PA^2 = PB \cdot PC = (PM - MB)(PM + MB) = PM^2 - MB^2$. Atunci $PA^2 + QM^2 = PA^2 + QA^2 + MB^2 = PM^2 + QA^2$, deci, conform lemei, $PQ \perp AM$.

(Şi în acestă rezolvare, argumentele de puterea punctului pot fi traduse prin asemănări.)

Soluţie 3: (*David Anghel*)
Fie H ortocentrul triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris, iar N mijlocul lui $[AH]$. Atunci $ANMO$ este paralelogram. Cum $OA \perp AP$, rezultă că $MN \perp AP$. Avem şi $AN \perp PM$, deci N este ortocentrul triunghiului APM. Rezultă că $PN \perp AM$. Rămâne să mai arătăm că $Q \in PN$. Un calcul simplu de unghiuri arată că $m(\sphericalangle NFM) = m(\sphericalangle NEM) = 90°$, deci ME şi MF sunt tangente la cercul circumscris lui AEF (al cărui centru este N). Rezultă că punctul Q se află pe polara, EF, a lui M, deci M se află pe polara lui Q. Deoarece şi A se află pe această polară (QA este tangentă la acest cerc), polara este AM şi este perpendiculară pe NQ. Rezultă că P, N, Q sunt coliniare şi se află pe o dreaptă perpendiculară pe AM.



Soluţia 4: (*Stan Fulger*)
Patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle ABC$. Totodată $\sphericalangle CAQ \equiv \sphericalangle ACB$ deoarece au laturi paralele, iar $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle BCA$, deci $\Delta\, AEQ \sim \Delta\, ABP$.

Deducem că $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AE}{AB} = \cos(\sphericalangle BAC)$ (1).

Deoarece $AO \perp AP$ şi $OM \perp AQ$, avem că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle PAQ$ (2).

Vrem să arătăm că $\Delta\, AMO \sim \Delta\, PQA$.

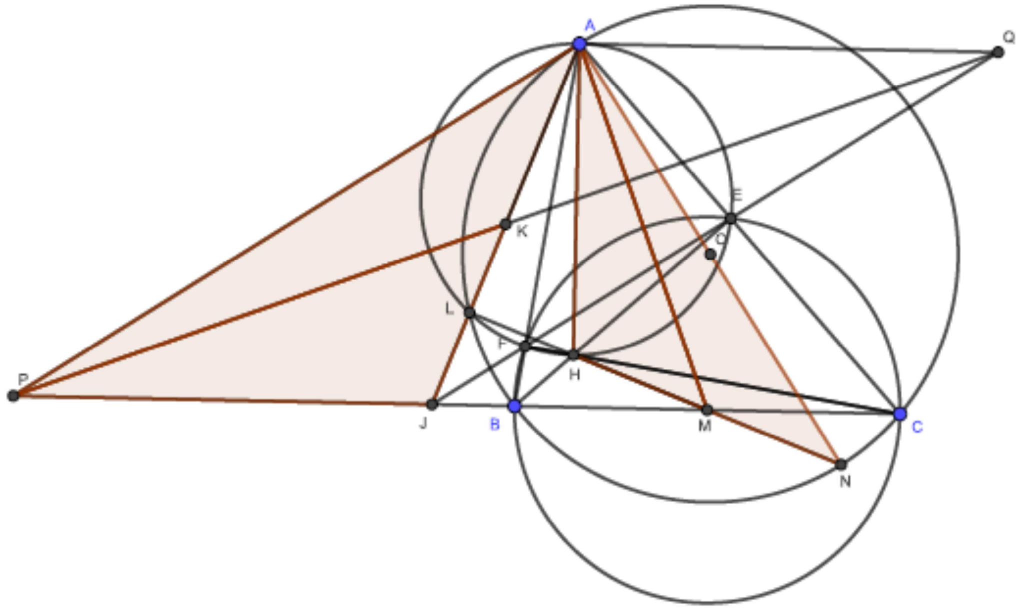
Avem $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OM}{OC} = \cos(\sphericalangle MOC) = \cos(\sphericalangle BAC)$ (3).

Din relaţiile (1) şi (3) obţinem $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{AQ}{AP}$ şi, cu (2), cele două triunghiuri sunt asemenea (cazul 2 de asemănare). Aşadar triunghiurile au laturile respectiv perpendiculare, deci $PQ \perp AM$.

Soluţia 5: (*Mircea Fianu*)

Fie *ABC* un triunghi ascuţitunghic în care *AB* < *AC*. Fie *E* şi *F* picioarele înălţimilor din *B*, respectiv *C*, iar *M* mijlocul laturii [*BC*]. Tangenta în *A* la cercul circumscris lui *ABC* intersectează dreapta *BC* în *P*. Paralela prin *A* la dreapta *BC* taie dreapta *EF* în *Q*. Demonstraţi că dreptele *PQ* şi *AM* sunt perpendiculare.

Soluţie: Fie *H* ortocentrul triunghiului *ABC* şi *N* punctul diametral opus lui *A* în cercul(*ABC*). Punctele *N*, *M* şi *H* sunt coliniare, deoarece *BHCN* este paralelogram.
Dacă $HM \cap (ABC) = \{L\}$, atunci patrulaterul *ALHE* este inscriptibil. Deasemenea, patrulaterele *EFBC* şi *ALBC* sunt inscriptibile, deci dreptele *AL*, *EF* şi *CB* sunt concurente în centrul radical al cercurilor (*ALF*), (*EFC*) şi (*CBE*), punctul J.
Avem $\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle PAB$, deci $JQ \parallel PA$ şi, cum $AQ \parallel PJ$, rezultă că *APJQ* este paralelogram, iar punctul $\{K\} = AJ \cap PQ$ este mijlocul segmentului $[AJ]$.
Triunghiurile *AHN* şi *PJA* sunt asemenea, având laturi respectiv perpendiculare şi fiind obtuzunghice în *H*, respectiv *J*. Deducem că medianele corespunzătoare laturilor omologe sunt perpendiculare, deci $PK \perp AM$. Rezultă concluzia.



P.S. În anul 2004, s-a propus, la primul baraj de seniori, următoarea problemă:

Fie *ABC* un triunghi ascuţitunghic în care *AB* < *AC*. Fie *E* şi *F* picioarele înălţimilor din *B*, respectiv *C*, iar *M* mijlocul laturii [*BC*]. Dacă $EF \cap BC = \{J\}$, iar *H* este ortocentrul triunghiului *ABC*, atunci $JH \perp AM$.

Sol: Evident, *H* este ortocentrul triunghiului *AJM*, deci $JH \perp AM$.

Am mai primit soluţie şi de la *Luca Pană*

În încheiere, vă propunem o scurtă listă de probleme care pot fi rezolvate cu aceeaşi idee ca cea din Soluţia 1, anume aceea de a considera un punct drept un cerc de rază 0.

1. Din punctul A, exterior cercului Γ, se duc tangentele $[AT]$ şi $[AT']$ la cercul Γ. Fie M, M' mijloacele segmentelor $[AT]$ şi $[AT']$, iar P un punct de pe dreapta MM'. Din P se duc tangentele PU, PV la Γ $(U, V \in \Gamma)$. UV intersectează MM' în Q. Arătaţi că triunghiul PAQ este dreptunghic.

test Franţa 2014

2. Fie ABC un triunghi scalen, fie I centrul cercului său înscris şi fie (ω) cercul său circumscris. Dreptele AI, BI, CI intersectează cercul (ω) a doua oară în punctele D, E, respectiv F. Dreptele prin I, paralele la laturile BC, CA, AB, intersectează dreptele EF, FD, respectiv DE, în punctele K, L, respectiv M. Demonstraţi că punctele K, L, M sunt coliniare.

BMO 2015, propusă de Theoklitos Paragyiou (Cipru)

3. Fie ABC un triunghi. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor AB şi AC în punctele Z, respectiv Y. Fie G punctul de intersecţie a dreptelor BY şi CZ şi fie R şi S două puncte astfel încât patrulaterele $BCYR$ şi $BCSZ$ să fie paralelograme. Demonstraţi că $GR = GS$.

Hossein Karke Abadi, Iran, IMO ShortList, 2009

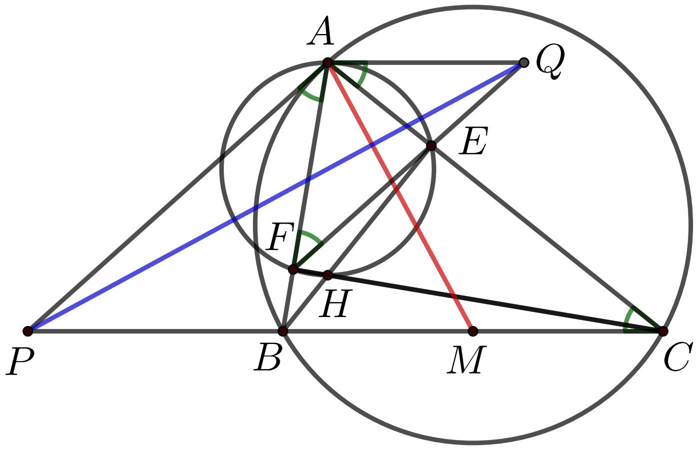
vezi aici

Problem of the week no. 189
Let ABC be an acute triangle such that $AB < AC$. Let E and F be the feet of the altitudes from B and C, respectively, and let M be the midpoint of the side BC. The tangent at A to the circumcircle of ABC meets the line BC at P. The line through A that is parallel to BC meets the line EF at Q.
Prove that lines PQ and AM are perpendicular.

TST Switzerland, 2019

Solution 1: As $\sphericalangle QAC = \sphericalangle ACB$ (Z-angles), $\sphericalangle PAB = \sphericalangle ACB = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AB})$ and $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ACB$ (quadrilateral $BCEF$ is cyclic). As the circumcenter of triangle AFE lies on AH and $AH \perp QA$, we get that QA is a tangent to this circle. From the power of Q it follows that $QA^2 = QE \cdot QF$ (one could also use the similarity of triangles AQF and EQA). Similarly (either using the power of P with respect to the circumcircle of ABC or using similarity), we get $PA^2 = PB \cdot PC$.
Considering the point A as a degenerate circle with radius 0 centered at A, the relations $QA^2 = QE \cdot QF$ and $PA^2 = PB \cdot PC$ show that points P and Q have the same powers with respect to circle A and the circumcircle of quadrilateral $BCEF$,

hence both points lie on the redical axis of these two circles. Thus, line PQ is perpendicular to the line determined by their centers. The circumcenter of $BCEF$ is M, therefore we obtain $PQ \perp AM$.

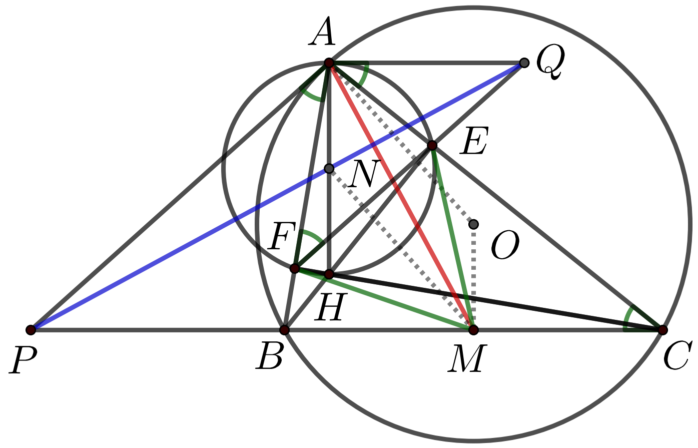


Solution 2: (*Gabriel Turbincă, Ana Duguleanu*)
We plan to use the following well-known:
Lemma: Let A, B, C, D four points in the plane (or space). Then

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

From the power of point Q with respect to the circle of diameter $[BC]$, as above, we get $QA^2 = QE \cdot QF = QM^2 - MB^2$ (we have used the fact that the power of a point Q with respect to a circle centered at O with radius R is $QO^2 - R^2$). From the power of point P with respect to the circumcircle, we have $PA^2 = PB \cdot PC = (PM - MB)(PM + MB) = PM^2 - MB^2$.
Then $PA^2 + QM^2 = PA^2 + QA^2 + MB^2 = PM^2 + QA^2$, hence, according to the Lemma, $PQ \perp AM$.

Solution 3: (*David Anghel*)
Let H be the orthocenter of ABC, O its circumcenter, and N the midpoint of $[AH]$. It is known that $ANMO$ is a parallelogram. From $OA \perp AP$, it follows that $MN \perp AP$. We also hve $AN \perp PM$, making N the orthocenter of triangle APM. It follows that $PN \perp AM$. We still need to prove that $Q \in PN$. A simple angle chasing shows that $m(\sphericalangle NFM) = m(\sphericalangle NEM) = 90°$, meaning that ME and MF are both tangent to the circumcircle of AEF (whose center is at N). It follows that Q lies on the polar line, EF, of M, which means that M lies on the polar line of Q. Since A also lies on this polar line (QA is tangent to this circle), the polar line is AM and it is perpendicular to NQ. It follows that P, N, Q are collinear and lie on a line perpendicular to AM.



Solution 4: (*Stan Fulger*)

$BCEF$ is cyclic, thus $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$. $\widehat{CAQ} = \widehat{ACB}$ (equal angles have the same color) as their sides are parallel, and $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, thus $\triangle AEQ \sim \triangle ABP \Longrightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{AE}{AB} = cos(\widehat{BAC})$ (1). Because $AO \perp AP, OM \perp AQ,$ we get $\widehat{AOM} = \widehat{PAQ}$ (2); if we prove $\triangle AMO \sim \triangle PQA$, we are done. But $\frac{OM}{OA} = \frac{OM}{OC} = cos(\widehat{MOC}) = cos(\widehat{BAC})$ (3). From relations (1) and (3) we get $\frac{OM}{OA} = \frac{AQ}{AP}$ and with (2), the two triangles are indeed similar (2^{nd} case of triangles' similarity), thus they have the sides mutually perpendicular and therefore $PQ \perp AM$.

Stan FULGER, Constanta