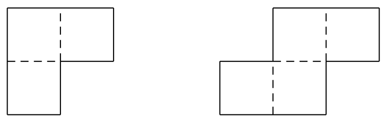
Problema săptămânii 188

Considerăm un dreptunghi $(2m-1)\times(2n-1)$, unde m şi n sunt numere naturale astfel încât $m, n \geq 4$. Dreptunghiul trebuie pavat cu dale de următoarele două feluri:

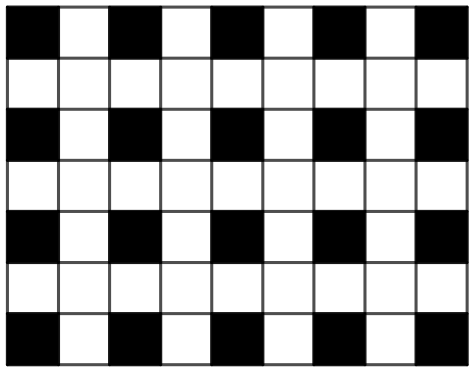


(Liniile punctate împart dalele în pătrăţele 1×1.) Dalele pot fi rotite şi întoarse câtă vreme fiecare pătrăţel unitate al unei dale se suprapune peste un pătrăţel unitate al dreptunghiului. Dalele nu au voie să se suprapună sau să depăşească marginile dreptunghiului.

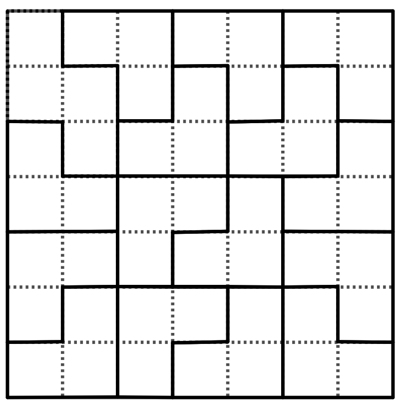
Care este numărul minim de dale necesar pavării dreptunghiului?

Putnam, 2016

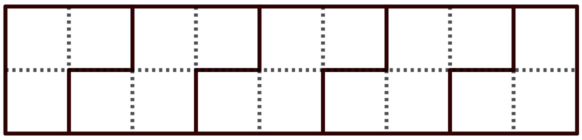
Soluţie: (*Andrei Giovani Chiriţă, Gabriel Turbincă, Luca Pană*)
Colorăm pătrăţelele dreptunghiului ca mai jos: (figura este pentru un dreptunghi 7×9; în general, vom face negre pătrăţelele aflate pe linii şi coloane impare)



Numărul pătrăţelelor colorate este mn.
Fiecare dală acoperă cel mult un pătrăţel negru, deci este nevoie de cel puţin mn dale.
În continuare, demonstrăm că acest număr este şi suficient, adică dreptunghiul se poate pava cu mn dale.
Mai jos este un exemplu pentru un pătrat 7×7.



Observaţie: Putem pava un dreptunghi $2 \times (2k-1)$ (şi $(2k+1) \times 2$) cu k dale, oricare are fi $k \geq 3$. Plasăm o dală L într-unul din colţuri, apoi plasăm succesiv $k-2$ dale Z şi apoi o dală L. Mai jos este un exemplu pentru un dreptunghi 2×9.

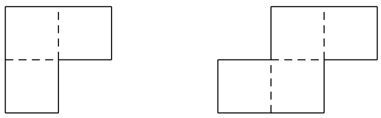


Împărţim un dreptunghi $7 \times (2n-1)$ într-un pătrat 7×7 şi $n-4$ dreptunghiuri 7×2. Pavăm pătratul 7×7 ca mai sus şi dreptunghiurile 7×2 ca în observaţie. Am folosit $16 + 4(n-4) = 4n$ dale.
Împărţim dreptunghiul $(2m-1) \times (2n-1)$ într-un dreptunghi $7 \times (2n-1)$ şi $m-4$ dreptunghiuri $2 \times (2n-1)$. Pavăm dreptunghiul $7 \times (2n-1)$ ca mai sus şi dreptunghiurile $2 \times (2n-1)$ ca în observaţie. Am folosit $4n + (m-4)n = mn$ dale.

Alte soluţii asemănătoare găsiţi pe AoPS.

Am primit o soluţie şi de la *David-Andrei Anghel*.

Problem of the week no. 188
Consider a $(2m-1) \times (2n-1)$ rectangular region, where m and n are integers such that $m, n \geq 4$. The region is to be tiled using tiles of the two types shown:

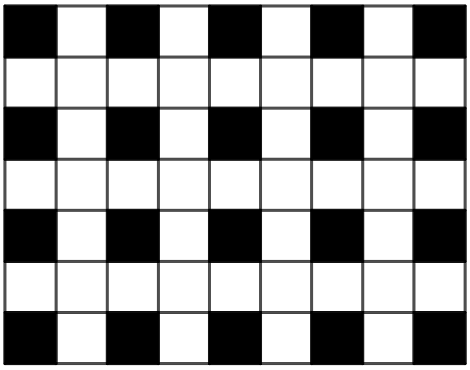


(The dotted lines divide the tiles into 1×1 squares.) The tiles may be rotated and reflected, as long as their sides are parallel to the sides of the rectangular region. They must all fit within the region, and they must cover it completely without overlapping.

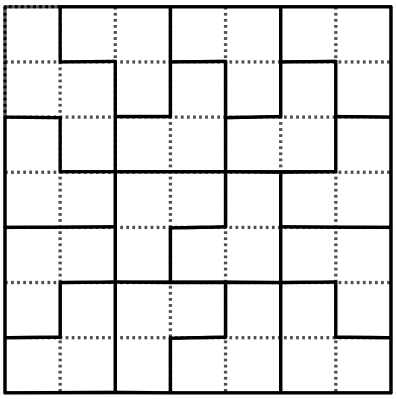
What is the minimum number of tiles required to tile the region?

Putnam, 2016

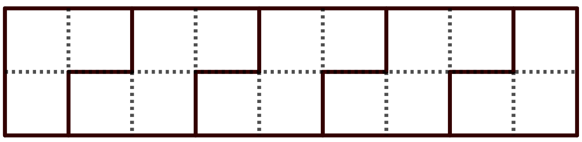
Solution: (*Andrei Giovani Chiriţă, Gabriel Turbincă*)
We color the unit squares of the rectangle as in the figure below: (the figure is for a 7×9 rectangle; in general, we color black the squares situated on odd lines and odd columns)



The number of black squares is mn.
Each tile covers at most one black square, therefore at least mn tiles are necessary to cover the rectangle.
Next, we prove that this number of tiles is also sufficient, i.e. one can cover the rectangle with mn tiles.
Below there is an example for a 7×7 square.



Remark: We can cover a $2 \times (2k-1)$ (or $(2k+1) \times 2$) rectangle with k tiles, for all $k \geq 3$. We place an L-shaped tile in one of the corners; next, we successively place $k-2$ Z-shaped tiles, and finally another L-shaped tile. Below there is an example for a 2×9 rectangle.



We split a $7 \times (2n-1)$ rectangle into a 7×7 square and $n-4$ 7×2 rectangles. We cover the 7×7 square as we did above and we cover the 7×2 ractangles as shown in the remark. We have used $16 + 4(n-4) = 4n$ tiles.
We divide the $(2m-1) \times (2n-1)$ rectangle into a $7 \times (2n-1)$ rectangle and $m-4$ rectangles of size $2 \times (2n-1)$. We cover the $7 \times (2n-1)$ rectangle as we did above, and we cover the $2 \times (2n-1)$ rectangles as shown in the remark. We have used

$4n + (m - 4)n = mn$ tiles.

Other similar solutions can be found on AoPS.