Problema săptămânii 187
Fie a şi b numere naturale nenule cu proprietatea că $a+b^3$ este divizibil cu $a^2+3ab+3b^2-1$. Demonstraţi că $a^2+3ab+3b^2-1$ este divizibil cu cubul unui număr natural mai mare ca 1.

Olimpiadă Canada, 2019

Soluţie: Ştim că $a^2+3ab+3b^2-1$ divide $a(a^2+3ab+3b^2-1)+(a+b^3)=(a+b)^3$. Evident, $a^2+3ab+3b^2-1>1$, deci are divizori primi. Dacă fiecare divizor prim al său ar apărea la puterea cel mult 2, adică $a^2+3ab+3b^2-1=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{a_n}$, unde $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\{1,2\}$, atunci $p_1,p_2,\ldots,p_n$ divid $(a+b)^3$, deci divid şi $a+b$. Atunci $p_1^2\cdot p_2^2\cdot\ldots\cdot p_n^2$ divide $(a+b)^2$, deci $a^2+3ab+3b^2-1$ divide $(a+b)^2$. Însă $a^2+3ab+3b^2-1>(a+b)^2$, deci presupunerea făcută conduce la o contradicţie. Aşadar, $a^2+3ab+3b^2-1$ este divizibil cu cubul unui număr (prim).

Am primit soluţii de la *David-Andrei Anghel, Carol Luca Gasan, Darius Lazea, Selim Cadîr* şi *Luca Pană.*

Remarcă: (*Titu Zvonaru*)
Există o infinitate de perechi de numere naturale (a,b) pentru care $a+b^3$ se divide cu $a^2+3ab+3b^2-1$. De exemplu, pentru $(a,b)=(n^3-3n+1,n^2+n-1)$, avem $a+b^3=a^2+3ab+3b^2-1$.

Problem of the week no. 187
Let a,b be positive integers such that $a+b^3$ is divisible by $a^2+3ab+3b^2-1$. Prove that $a^2+3ab+3b^2-1$ is divisible by the cube of an integer greater than 1.

2019 Canadian Mathematical Olympiad

Solution: We know that $a^2+3ab+3b^2-1$ divides $a(a^2+3ab+3b^2-1)+(a+b^3)=(a+b)^3$.
Clearly, $a^2+3ab+3b^2-1>1$, so it must have prime divisors. If each of its prime divisors appears in its prime factorization at an exponent that is at mast 2, i.e. $a^2+3ab+3b^2-1=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{a_n}$, where $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\{1,2\}$, then $p_1,p_2,\ldots,p_n$ divides $(a+b)^3$, so they also divide $a+b$. It follows that $p_1^2\cdot p_2^2\cdot\ldots\cdot p_n^2$ divides $(a+b)^2$, hence $a^2+3ab+3b^2-1$ divides $(a+b)^2$. But $a^2+3ab+3b^2-1>(a+b)^2$, hence our assumption led to a contradiction. Thus, $a^2+3ab+3b^2-1$ is divisible by the cube of a (prim) number.