Problema săptămânii 185

În patrulaterul $ABCD$, $AB = AD$ şi $BC = DC$. Fie M punctul de intersecţie a perpendicularelor duse pe latura AB în B şi pe latura CD în D. Arătaţi că $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$.

Revista KöMaL, pb B. 5069. (decembrie 2019)

Soluţie: Soluţia oficială, adaptată de dl. *Mihai Miculiţa*, o puteţi vedea în fişierul alăturat. Respectiva soluţie, ca şi celelalte primite, depind puţin de figură. Dacă $AB < BC$ sau $P \in (AC)$, argumentele se schimbă un pic. (În cazul $AB = BC$, adică $ABCD$ romb, punctul M nu există deci problema nu are obiect.)

Soluţia 2: (*Ioana Stănoiu*)

Fie $\mathscr{C}_1$ cercul cu centrul în A şi rază AB şi $\mathscr{C}_2$ cercul cu centrul în C şi rază CD. Fie G al doilea punct de intersecţie a lui MD cu $\mathscr{C}_1$, iar H al doilea punct de intersecţie a lui MB cu cercul $\mathscr{C}_2$.

Deoarece MB este tangentă la $\mathscr{C}_1$, avem $\sphericalangle DGB \equiv \sphericalangle DBH$. (1)

Deoarece MD este tangentă la $\mathscr{C}_2$, avem $\sphericalangle DHB \equiv \sphericalangle BDG$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă $\Delta\, DHB \sim \Delta\, BDG$, deci $\dfrac{HB}{DG} = \dfrac{BD}{GB}$. (3)

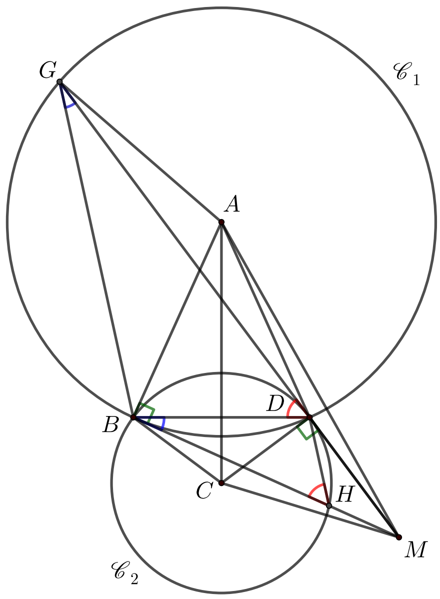
În acelaşi timp, $m(\sphericalangle DCB) = 2m(\sphericalangle DHB) \overset{(2)}{=} 2m(\sphericalangle GDB) = m(\sphericalangle GAB)$, deci triunghiurile isoscele DCB şi BAG sunt asemenea. Atunci $\dfrac{BC}{GA} = \dfrac{BD}{BG}$. (4)

Din puterea lui M faţă de cele două cercuri avem $MG \cdot MD = MB^2$ şi $MB \cdot MH = MD^2$, deci $MG \cdot MH = MB \cdot MD$, ceea ce arată că $DH \parallel BG$.

În concluzie, avem: $m(\sphericalangle AGM) = m(\sphericalangle AGB) - m(\sphericalangle DGB) = m(\sphericalangle CBD) - m(\sphericalangle HBD) = m(\sphericalangle CBM)$ şi $\dfrac{BC}{GA} = \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{HB}{GD} = \dfrac{BM}{GM}$.

(Calculul de unghiuri de mai sus depinde de configuraţie.)

Rezultă că triunghiurile BCM şi GAM sunt asemenea, de unde concluzia.



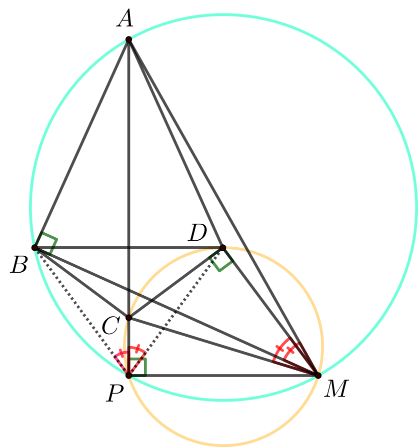
Am mai primit soluţii de la *David-Andrei Anghel, Luca Pană* şi *Radu-Alexandru Vasilescu.*

Problem of the week no. 185

In the quadrilateral $ABCD$, $AB = AD$ and $BC = DC$. Let M be the intersection of the perpendiculars drawn to side AB at B, and side CD at D. Show that $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$.

KöMaL, B. 5069. (December 2019)

Solution 1: Assume $AB > BC$ and ACM obtuse. The other cases are similar. Let P be the projection of M onto AC. Then $ABPM$ and $CPMD$ are cyclic, so $\sphericalangle CMD = \sphericalangle CPD = \sphericalangle CPB = \sphericalangle APB = \sphericalangle AMP$, which leads to the conclusion.



Solution 2: (*Ioana Stănoiu*)

Let $\mathscr{C}_1$ be the circle centered at A with radius AB and $\mathscr{C}_2$ the circle centered at C with radius CD. Let G be the second intersection point of MD with $\mathscr{C}_1$, and let H be the second intersection point of MB with $\mathscr{C}_2$.

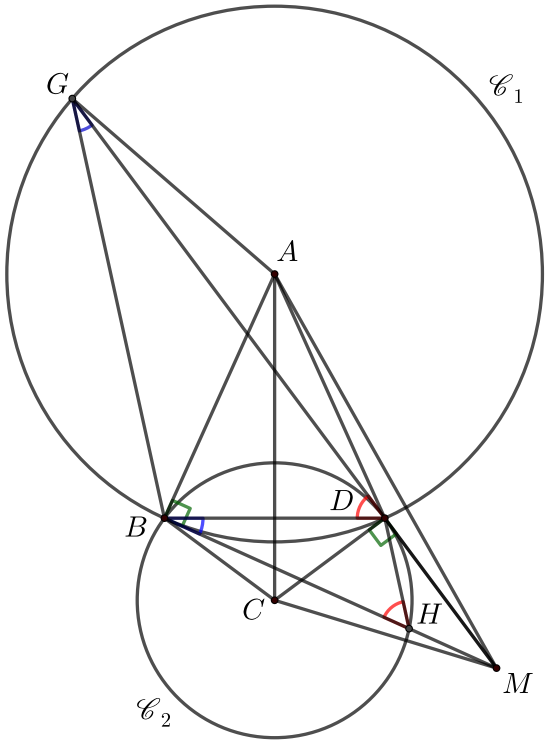
As MB is tangent to $\mathscr{C}_1$, we have $\sphericalangle DGB = \sphericalangle DBH$. (1)

As MD is tangent to $\mathscr{C}_2$, we have $\sphericalangle DHB = \sphericalangle BDG$. (2)

From (1) and (2) it follows that $\Delta\, DHB \sim \Delta\, BDG$, hence $\dfrac{HB}{DG} = \dfrac{BD}{GB}$. (3)

In the same time, $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle DHB \overset{(2)}{=} 2\sphericalangle GDB = \sphericalangle GAB$,which means that isosceles triangles DCB and BAG are similar. It follows that $\dfrac{BC}{GA} = \dfrac{BD}{BG}$. (4)

From the power of point M with respect to the two circles we get $MG \cdot MD = MB^2$ and $MB \cdot MH = MD^2$, hence $MG \cdot MH = MB \cdot MD$, which shows that $DH \parallel BG$. In conclusion, : $\sphericalangle AGM = \sphericalangle AGB - \sphericalangle DGB = \sphericalangle CBD - \sphericalangle HBD = \sphericalangle CBM$ (this angle chasing above depends actually on the configuration) and $\dfrac{BC}{GA} = \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{HB}{GD} = \dfrac{BM}{GM}$. It follows that triangles BCM and GAM are similar, which leads to the conclusion.


G
$\mathscr{C}_1$
A
D
B
C
H
M
$\mathscr{C}_2$