Programul upper.school de pregătire pentru JBMO

Curs 32 - Omotetie

Andrei Eckstein

§1 Ce este o omotetie?

§1.1 Introducere

Vom discuta numai despre omotetia în plan. Omotetia în spaţiu se defineşte absolut la fel şi poate fi folosită la geometria în spaţiu.
Omotetia este o *transformare geometrică* a planului, tot ca şi simetria faţă de un punct, simetria faţă de o dreaptă, rotaţia în jurul unui punct, translaţia sau inversiunea. Toate aceste „transformări" sunt *funcţii* care asociază fiecărui punct din plan, un alt punct din plan. Cu alte cuvinte, fiecărui punct P din plan îi va corespunde un alt punct din plan, pe care îl vom nota cu P'.

§1.2 Definiţii

Fie O un punct fixat din plan şi $k > 0$ un număr real fixat.

Definiţia 1. (Omotetia directă) Omotetia directă de centru O şi raport k este funcţia care duce orice punct $A \neq O$ al planului în punctul $A' \in (OA$ care satisface $OA' = k \cdot OA$, iar pe O îl duce în O.

Dacă $k > 1$, omotetia directă de raport k este o dilataţie.
Dacă $k \in (0, 1)$, ea este o contracţie, iar pentru $k = 1$ ea este banala aplicaţie identică.

Definiţia 2. (Omotetia inversă) Omotetia inversă de centru O şi raport k este funcţia care duce orice punct $A \neq O$ al planului în punctul $A' \in OA \setminus (OA$ care satisface $OA' = k \cdot OA$, iar pe O îl duce în O.

Dacă $k > 1$, omotetia inversă de raport k este o dilataţie.
Dacă $k \in (0, 1)$, ea este o contracţie, iar pentru $k = 1$ ea este simetria faţă de punctul O.

Spunem că A' este „omoteticul" punctului A (atunci când este clar despre care omotetie este vorba). Să observăm că dacă omotetia directă (inversă) de centru O şi raport k îl duce pe A în A', atunci omotetia directă (inversă) de centru O şi raport $\dfrac{1}{k}$ îl duce pe A' în A.

Mai pe scurt, cele două tipuri de omotetie pot fi definite printr-o definiţie comună care foloseşte însă noţiunea de vector. Cei care nu sunt familiarizaţi cu respectiva noţiune (măcar de la fizică), pot sări definiţia de mai jos.

Definiţia 3. (Omotetia)
Fie O un punct din plan şi k un număr real nenul.
Omotetia de centru O şi raport k este funcţia care duce orice punct $A \neq O$ al planului în punctul $A' \in OA$ care satisface $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, iar pe O îl duce în O.

Exemple:
Fie ABC un triunghi, M mijlocul laturii (BC) şi G centrul de dreutate al triunghiului. Atunci:
- omotetia directă de centru B şi raport 2 îl duce pe M în C;
- omotetia directă de centru B şi raport $\frac{1}{2}$ îl duce pe C în M;
- omotetia inversă de centru M şi raport 1 îl duce pe B în C şi pe C în B;
- omotetia directă de centru M şi raport 3 îl duce pe G în A;
- omotetia inversă de centru G şi raport $\frac{1}{2}$ îl duce pe A în M.

§2 Proprietăți

1. O omotetie duce puncte coliniare în puncte coliniare (transformă drepte în drepte, segmente în segmente). Mai mult, o omotetie de centru O transformă dreapta AB în dreapta $A'B'$ care este paralelă cu AB (sau confundată cu aceasta dacă $O \in AB$). La fel, omotetia duce segmente în segmente paralele (sau aflate pe aceeaşi dreaptă).

2. Oricare ar fi două segmente paralele necongruente AB şi $A'B'$, există o singură omotetie care îl duce pe A în A' şi pe B în B'.
Oricare ar fi două segmente paralele necongruente $[AB]$ şi $[CD]$, există două omotetii care îl duc pe $[AB]$ în $[CD]$: una directă şi una inversă. Una îl duce pe A în C şi pe B în D, cealaltă îl duce pe A în D şi pe B în C.

3. O omotetie duce un triunghi ABC într-un triunghi $A'B'C'$ având laturile paralele cu ABC, adică un triunghi asemenea cu cel iniţial. Raportul de asemănare este k (raportul de asemănare este raportul omotetiei).

4. O omotetie păstrează unghiuri: $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle ABC$.

5. O omotetie păstrează rapoartele: $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$. În particular, duce segmente congruente în segmente congruente.

6. O omotetie duce cercuri în cercuri. Mai precis, o omotetie de raport k duce cercul $\mathscr{C}(X, R)$ în cercul $\mathscr{C}(X', kR)$. Între două cercuri de raze diferite există două omotetii, una directă şi una inversă.

7. O omotetie păstrează tangenţa, adică transformă două cercuri tangente interior/exterior în T în două cercuri tangente interior/exterior în T'. Analog în cazul unei drepte tangente la un cerc.

§2.1 Omotetii ale unor poligoane

§2.1.1 Teoreme clasice

Problema 2.1 (Teoremă)
Într-un trapez, mijloacele bazelor, punctul de intersecţie a diagonalelor şi punctul de intersecţie a dreptelor suport ale laturilor neparalele sunt patru puncte coliniare.

Demonstraţie: Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[CD]$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{P\} = BC \cap DA$. Ne uităm la cele două omotetii (directă şi inversă) care transformă segmentul $[AB]$ în segmentul $[CD]$.
Cea directă este de centru P şi raport $k = \frac{CD}{AB}$. Ea duce A în C, B în D şi mijlocul lui $[AB]$ în mijlocul lui $[CD]$, adică pe M în N. Rezultă că M, N, P sunt coliniare.
Omotetia inversă care duce $[AB]$ în $[CD]$ este omotetia de centru O şi raport $k = \frac{CD}{AB}$. Ea duce A în D, B în C şi mijlocul lui $[AB]$ în mijlocul lui $[CD]$, adică pe M în N. Rezultă că M, N, O sunt coliniare.
Conchidem că M, N, P, O sunt coliniare.

Problema 2.2 (Teoremă)
Fie ABC un triunghi, A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, G centrul de greutate, H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris. Atunci:
- omotetia inversă de centru G şi raport $\frac{1}{2}$ transformă triunghiul ABC în triunghiul său median, $A'B'C'$;
- această omotetie transformă H, ortocentrul lui ABC, în O, ortocentrul lui $A'B'C'$;
- punctele O, G, H sunt coloniare (dreapta lui Euler) şi $\frac{OG}{OH} = \frac{1}{2}$;
- această omotetie transformă cercul circumscris triunghiului ABC (de rază R) în cercul circumscris triunghiului median (cercul lui Euler), care are raza $\frac{R}{2}$;
- această omotetie transformă O, centrul cercului circumscris lui ABC, în H, centrul cercului circumscris lui $A'B'C'$;
- notând cu O' centrul cercului lui Euler, avem $O' \in GO$ şi $\frac{GO'}{GO} = \frac{1}{2}$, deci O' este mijlocul lui $[OH]$.

Demonstraţie:
Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au laturile paralele, deci sunt omotetice. Centrul de omotetie se găseşte la intersecţia dreptelor AA', BB', CC' care sunt mediane în ABC, deci se intersectează în G.
Să mai observăm că mediatoarele triunghiului ABC sunt înălţimi în triunghiul median, deci O este ortocentrul triunghiului median.

Completare:
Desigur, aceeaşi omotetie duce centrul cercului înscris în triunghiul ABC, I, în centrul cercului înscris în triunghiul median, S (centrul lui Spieker), astfel că I, G, S sunt coliniare (dreapta lui Nagel) şi $\frac{GS}{GI} = \frac{1}{2}$. Dreptele $A'S$, $B'S$ şi $C'S$ sunt „separatoare" adică fiecare din ele împarte perimetrul triunghiului ABC în două părţi egale (vezi materialul despre Teorema bisectoarei glisante).
De asemenea, dacă notăm cu T_A punctul de tangentă al cercului A-exînscris cu latura BC şi definim analog punctele T_B şi T_C, atunci dreptele AT_A, BT_B şi CT_C sunt concurente în punctul lui Nagel. Omotetia noastră duce punctul lui Nagel, N al triunghiului ABC în punctul lui Nagel al triunghiului median, care nu este altcineva decât I. Deducem că $N \in GI$ (adică punctul lui Nagel se află pe dreapta lui Nagel).

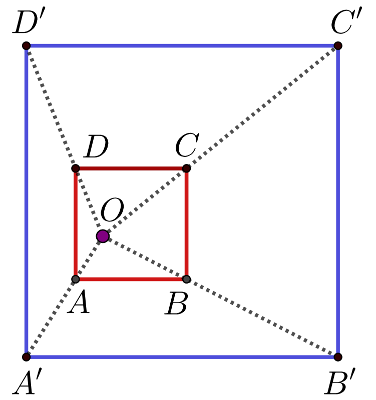
§2.1.2 Aplicaţii

Problema 2.3

Fie $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ două pătrate astfel încât $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$ şi $DA \parallel D'A'$. Demonstraţi că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt fie paralele, fie concurente.

Două precizări referitoare la enunţ:
1. Cele două pătrate trebuie să aibă vârfurile în aceeaşi ordine (ambele în sensul acelor de ceasornic de exemplu), în caz contrar afirmaţia nefiind adevărată.
2. Prin paralele se înţelege „paralele sau confundate".

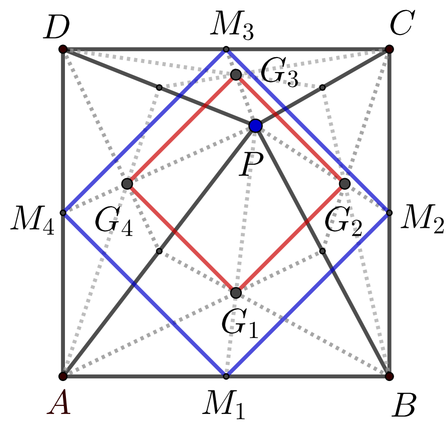
Dacă pătratele sunt congruente, patrulaterul $ABB'A'$ şi analoagele sunt paralelograme (posibil degenerate), deci $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Considerăm omotetia directă de raport $\frac{A'B'}{AB}$ care îl duce pe A în A'. Ea va duce pătratul $ABCD$ de latură $\ell = AB$ într-un pătrat având laturile paralele cu acesta şi de lungime $k\ell = A'B'$, deci îl va duce în pătratul $A'B'C'D'$. Aşadar dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente în centrul de omotetie directă a celor două pătrate.



Problema 2.4

Fie P un punct în interiorul pătratului $ABCD$. Demonstraţi că centrele de greutate ale triunghiurilor ABP, BCP, CDP şi DAP sunt vârfurile unui pătrat.

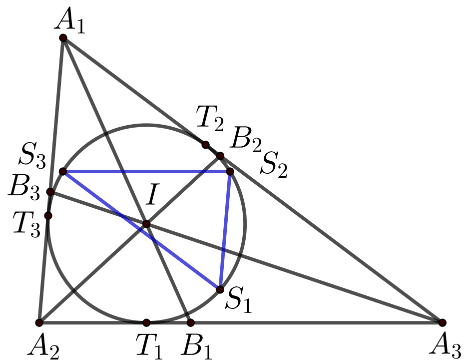
Fie M_1, M_2, M_3, M_4 mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA, iar G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor PAB, PBC, PCD, respectiv PDA. Evident, $M_1M_2M_3M_4$ este pătrat şi, cum $G_i \in (PM_i$ este astfel ca $\frac{PG_i}{PM_i} = \frac{2}{3}$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, omotetia directă de centru P şi raport $\frac{2}{3}$ transformă pătratul $M_1M_2M_3M_4$ în $G_1G_2G_3G_4$ care este, prin urmare, pătrat.



Problema 2.5

Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi scalen cu laturile a_1, a_2, a_3 (a_i este latura opusă lui A_i). Pentru $i = 1, 2, 3$, M_i este mijlocul laturii A_i, iar T_i este punctul de contact al cercului înscris cu latura a_i. Notăm cu S_i simetricul lui T_i faţă de bisectoarea unghiului A_i. Demonstraţi că dreptele M_1S_1, M_2S_2 şi M_3S_3 sunt concurente. (IMO 1982)

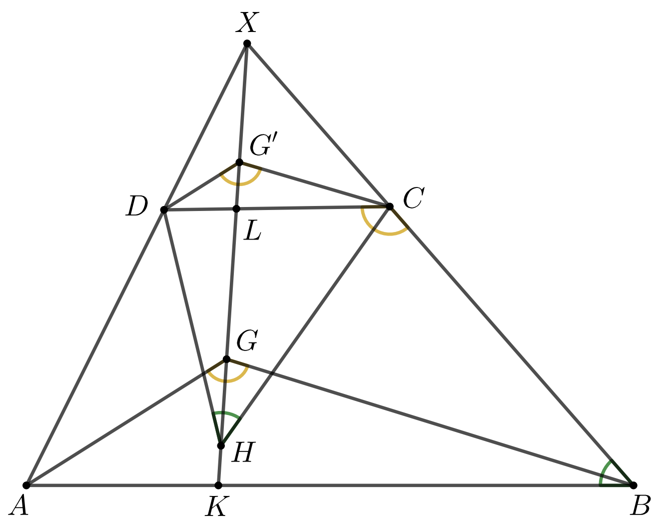
Deoarece A_iB_i trece prin centrul cercului înscris, S_i se află pe cercul înscris. Cum S_1 este simetricul lui T_1 faţă de A_1B_1, iar T_2 este simetricul lui T_3 faţă de A_1B_1, $T_2S_2T_1T_3$ este trapez isoscel. La fel şi $T_1S_1T_2T_3$. Rezultă că $T_3S_1 = T_1T_2 = T_3S_2$, deci IT_3 e mediatoarea lui $[S_1S_2]$. Aşadar, $S_1S_2 \parallel A_1A_2 \parallel M_1M_2$. Prin urmare, triunghiurile $S_1S_2S_3$ şi $M_1M_2M_3$ sunt omotetice.



Pentru a putea deduce că dreptele M_1S_1, M_2S_2 şi M_3S_3 sunt concurente şi nu paralele, mai trebuie să justificăm că cele două triunghiuri nu sunt congruente. Cercul circumscris lui $S_1S_2S_3$ este cercul înscris, iar cercul circumscris lui $M_1M_2M_3$ este cercul lui Euler. Cum triunghiul $A_1A_2A_3$ nu este echilateral, cele două cercuri au raze diferite, de unde concurenţa.

Problema 2.6

Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi punctele $K \in (AB)$, $L \in (CD)$ astfel încât $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{DL}{LC}$. Presupunem că există $G, H \in [KL]$ astfel încât $\sphericalangle AGB \equiv \sphericalangle BCD$ şi $\sphericalangle CHD \equiv \sphericalangle ABC$. Demonstraţi că punctele B, C, G, H sunt conciclice.



Considerăm omotetia directă de raport $\frac{CD}{AB}$. Centrul acesteia este $\{X\} = AD \cap BC$. Această omotetie va duce $[AB]$ în $[CD]$ şi, în particular, punctul K care împarte segmentul $[AB]$ în raport $r = \frac{AK}{KB}$ va fi dus în punctul care împarte segmentul $[CD]$ în raport r. Deoarece $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC} = r$, acest punct va fi tocmai L. Aşadar, X, L şi K sunt coliniare. Fie G' punctul în care această omotetie îl duce pe G. Cum $G \in XK$, rezultă că $G' \in XK$. De asemenea, omotetia duce segmente în segmente paralele, deci $DG' \parallel AG$, $CG' \parallel BG$. Rezultă că $m(\sphericalangle DG'C) = m(\sphericalangle AGB) = m(\sphericalangle BCD) = 180° - m(\sphericalangle ABC) = 180° - m(\sphericalangle CHD)$, deci patrulaterul $G'DHC$ este inscriptibil.
Rezultă ca $m(\sphericalangle GHC) = m(\sphericalangle G'DC) = m(\sphericalangle GAB) = 180° - m(\sphericalangle AGB) - m(\sphericalangle GBA) = 180° - m(\sphericalangle BCD) - m(\sphericalangle GBA) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle GBA) = m(\sphericalangle GBC)$, ceea ce arată că patrulaterul $GHBC$ este inscriptibil.

§2.2 Omotetii ale cercurilor

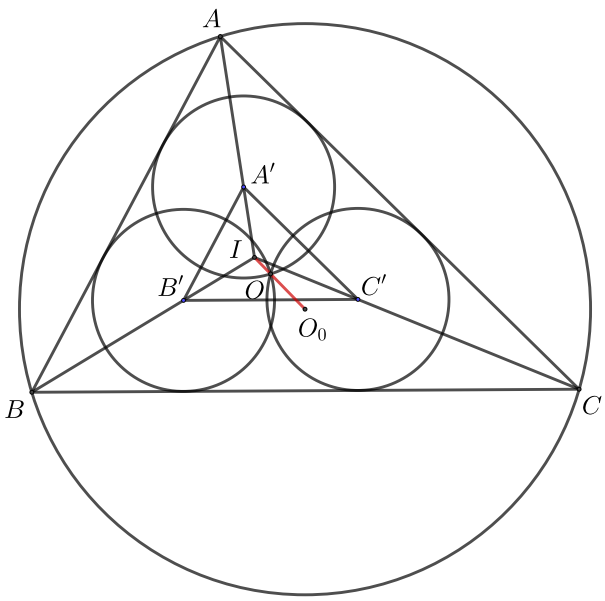
Între două cercuri de centre şi raze diferite, $\mathscr{C}_1(O_1, R_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2, R_2)$ există două omotetii. Centrele acestora se află pe linia centrelor O_1O_2 şi verifică $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Unul din puncte se află pe segmentul $[O_1O_2]$ (centrul omotetiei inverse), celălalt pe una din prelungiri (centrul omotetiei directe).

Dacă există, tangentele comune exterioare se intersectează în centrul omotetiei directe. Dacă există, tangentele comune interioare se intersectează în centrul omotetiei inverse.

Dacă două cercuri sunt tangente (interior sau exterior), unul din centrele de omotetie este punctul de tangenţă. Deseori aceasta este omotetia mai utilă dintre cele două.

Problema 2.7

Trei cercuri congruente au un punct comun, O, şi se află în interiorul triunghiului ABC. Fiecare cerc este tangent la două dintre laturile triunghiului. Demonstraţi că centrul cercului înscris, centrul cercului circumscris şi punctul O sunt coliniare. (IMO 1981)



Razele fiind egale, punctele A' şi B' sunt la distanţă egală de AB, deci $A'B' \parallel AB$. Analog şi celelalte. Având laturile paralele, triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind intersecţia dreptelor AA', BB', CC'. Însă acestea sunt bisectoarele triunghiului ABC, deci centrul de omotetie este I, centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Această omotetie duce cercul circumscris triunghiului ABC, O_0, în centrul cercului circumscris lui $A'B'C'$. Cum $OA' = OB' = OC'$ (raze egale), acesta este chiar punctul O, deci centrul de omotetie şi centrele cercurilor circumscrise celor două triunghiuri, I, O_0 şi O, sunt coliniare.

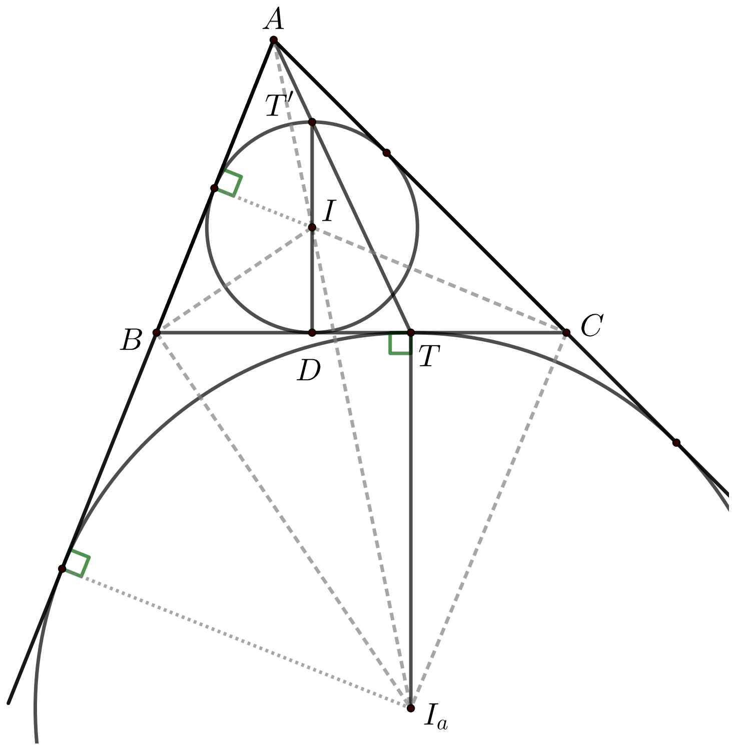
Problema 2.8

Cercul înscris în triunghiul ABC intersectează latura BC în D şi fie $[DT']$ un diametru al cercului înscris. Dacă AT' intersectează BC în T, atunci $BD = CT$.

Se ştie că punctul $T \in (BC)$ care are proprietatea $CT = BD$ este tocmai punctul de tangenţă a cercului A-exînscris cu latura BC. Este natural atunci să considerăm cercul A-exînscris. Notăm cu I_a centrul său şi cu T'' punctul său de tangenţă cu latura BC. Demonstrăm că $T = T''$. Ne uităm la omotetia directă care duce cercul înscris în cel exînscris. Centrul acestei omotetii este punctul de intersecţie a tangentelor comune exterioare, adică A. Această omotetie duce rază IT' a cercului înscris într-o rază paralelă cu ea a cercului exînscris. Cum $IT' \perp BC$, IT' va fi dusă în raza perpendiculară pe BC, adică I_aT''. Deducem că A, T' şi T'' sunt coliniare, adică $T'' = T$, de unde concluzia.

Pe scurt, am fi putut spune că omotetia noastră duce „polul nord” al cercului înscris (punctul cel mai de „sus” al cercului înscris) în „polul nord” al cercului exînscris.

Aplicaţii interesante ale acestei proprietăţi găsiţi în materialul Three geometry lemmas al lui Yufei Zhao.



Problema 2.9

Fie ABD un triunghi în care $m(\sphericalangle D) > m(\sphericalangle B)$ şi fie $C \in [AB]$ astfel încât $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle B$. Un cerc cu centrul P este tangent arcului BD al cercului circumscris triunghiului ABD în punctul F şi segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ în punctele G, respectiv E. Arătaţi că triunghiul ADG este isoscel.

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABD şi X un punct pe tangenta în A la acest cerc, X în acelaşi semiplan cu D faţă de AB. Atunci $\sphericalangle XAD \equiv \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDA$, deci $AX \parallel CD$. Omotetia de centru F care îl duce pe P în O (adică duce „cercul mic” în „cercul mare”) va duce tangenta CD la cercul mic într-o tangentă la cercul mare paralelă cu CD, adică în AX. Rezultă de aici că această omotetie duce punctul de tangenţă E în A, deci că punctele F, E, A sunt coliniare.
Din puterea punctului A faţă de cercul mic rezultă că $AG^2 = AE \cdot AF$ (1).

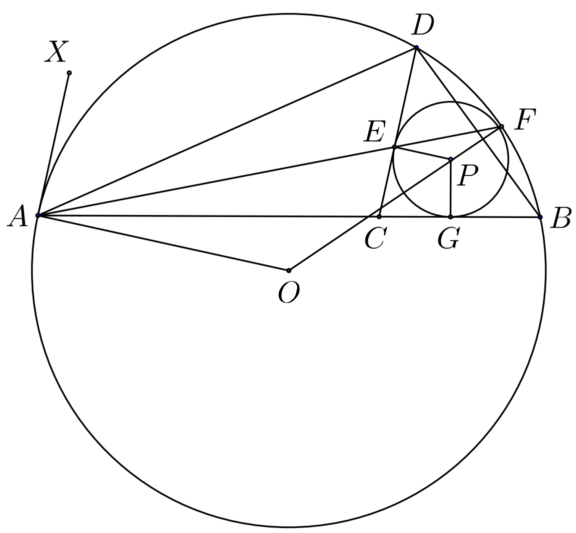
Deoarece $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle EDA$, avem că $\Delta\, EDA \sim \Delta\, DFA$, de unde rezultă că $AD^2 = AE \cdot AF \qquad (2)$.
Din (1) şi (2) rezultă $AG = AD$ şi concluzia.

În cazul particular $m(\sphericalangle ADB) = 90°$ se obţine următoarea problemă dată la barajul 3 din 2012:

Se consideră un semicerc de diametru $[AB]$ şi centru O şi fie C un punct arbitrar pe segmentul $[OB]$. Punctul D de pe semicerc este astfel încât $CD \perp AB$. Un cerc cu centrul P este tangent arcului BD în F şi segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ în punctele G, respectiv E. Arătaţi că triunghiul ADG este isoscel.

În acest caz, coliniaritatea punctelor A, E, F este mai uşor de intuit: omotetia directă de centru F care duce „cercul mic” în „cercul mare”, duce punctul cel mai „vestic” al „cercului mic”, E, în punctul cel mai „vestic” al „cercul mare”, A.

Mai multe despre această problemă puteţi afla din RMT nr. 1/2015.



Problema 2.10

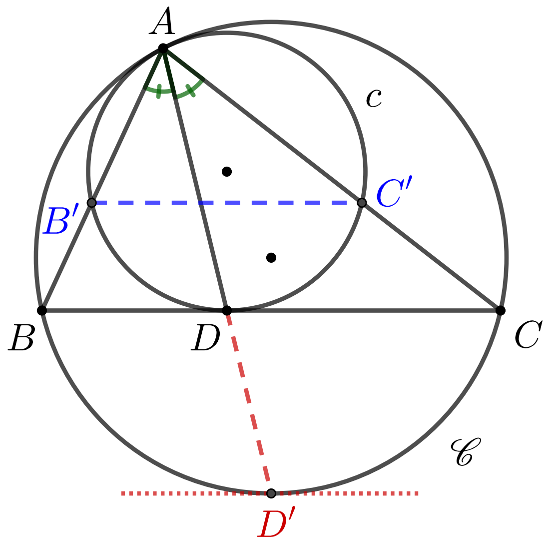
Teoremă.
Cercul c este tangent interior cercului $\mathscr{C}$ având raza mai mică decât acesta. Punctul comun al celor două cercuri este A. O tangentă la cercul mic intersectează cercul mare în B şi C, iar cercul mic în D. Atunci $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

Vă prezentăm două demonstraţii. Ambele se bazează pe omotetia directă dintre cercul mic şi cercul mare. Centrul acestei omotetii este punctul de tangenţă, A.

Demonstraţia 1: Omotetia directă care duce cercul c în cercul $\mathscr{C}$ duce punctul D în punctul $D' \in AD \cap \mathscr{C}$ în care tangenta la cercul $\mathscr{C}$ este paralelă cu tangenta în D la cercul c, adică cu BC. Se ştie că punctul de pe arcul BC în care tangenta este paralelă cu BC este mijlocul acestuia (lucru valabil pentru ambele arce BC). Aşadar, D' este mijlocul arcului BC, prin urmare $\sphericalangle BAD' \equiv \sphericalangle CAD'$ şi concluzia.

Pe scurt, ideea e că „polul sud” al lui c este dus în „polul sud” al lui $\mathscr{C}$.

Demonstraţia 2: Ne uităm acum la omotetia directă (de centru A) care duce cercul $\mathscr{C}$ în cercul c. Ea duce punctele B şi C în $B' \in AB \cap c$, respectiv $C' \in AC \cap c$, deci duce BC în $B'C'$ care este paralelă cu BC. Din nou rezultă că arcele $B'D$ şi DC' sunt congruente, deci $\sphericalangle B'AD \equiv \sphericalangle C'AD$.



Are loc următoarea proprietate mai generală, a cărei demonstraţie v-o lăsăm exerciţiu.

Generalizare.
Cercul c este tangent interior cercului $\mathscr{C}$ având raza mai mică decât acesta. Punctul comun al celor două cercuri este A. O coardă BC în cercul mare care taie cercul mic în D şi E. Demonstraţi că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EAC$.

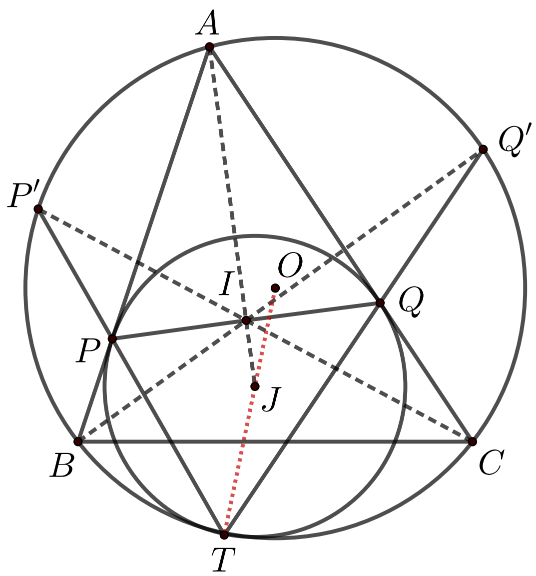
O aplicaţie celebră a acestui rezultat este:

Problema 2.11

Teorema lui Nixon
Un cerc este tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC în punctul T şi laturilor AB şi AC în P şi Q. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci I este mijlocul lui $[PQ]$.

Un asemenea cerc, tangent interior cercului circumscris şi tangent la două din laturile triunghiului se numeşte *cerc mixtliniar*.

Conform teoremei precedente, $(TP$ şi $(TQ$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ATB$, respectiv $\sphericalangle ATC$. Dacă $(TP$ şi $(TQ$ intersectează cercul circumscris în P', respectiv Q', atunci P' este mijlocul arcului AB, iar Q' este mijlocul arcului AC, deci C, I, P' sunt coliniare şi la fel şi B, I, Q'. Aplicând teorema lui Pascal hexagramei $CABQ'TP'$ obţinem că punctele $P \in AB \cap TP'$, $Q \in AC \cap TQ'$ şi $I \in BQ' \cap CP'$ sunt coliniare. Cum I se află pe bisectoarea din vârf a triunghiului isoscel APQ, rezultă că $PI = IQ$.



Cazul particular $AB = AC$ a fost dat la IMO 1978. În articolul *Homothety* găsiţi o demonstraţie instructivă a acestei probleme, folosind **numai** omotetie.

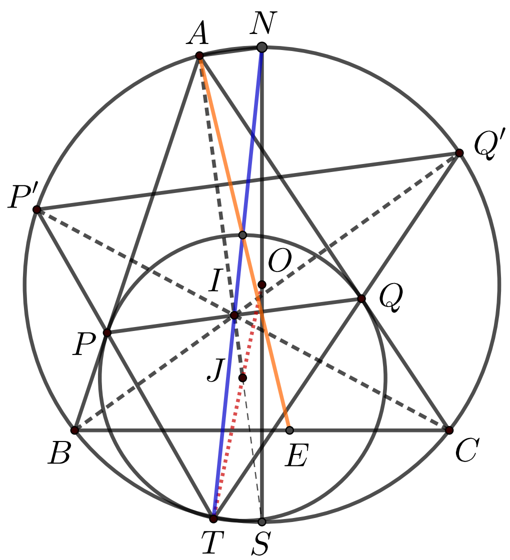
Alte proprietăţi ale configuraţiei:

Problema 2.12

a) $(TI$ intersectează cercul circumscris în mijlocul arcului BC care îl conţine pe A;
b) $(TI$ intersectează cercul mixtliniar într-un punct aflat pe AE, unde E este punctul de contact al cercului A-exînscris cu latura BC.

a) TI e mediană, iar $(TA$ simediană în triunghiul TPQ pentru că tangentele în P şi Q la cercul mixtliniar se taie în A. Atunci $\sphericalangle P'TA \equiv \sphericalangle Q'TN$, unde N este punctul în care $(TI$ taie cercul circumscris. Rezultă că $AN \parallel P'Q'$. Atunci $m(\sphericalangle NBC) = m(\sphericalangle NBQ') + m(\sphericalangle Q'BC) = m(\sphericalangle ACP') + m(\sphericalangle Q'BC) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle C) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle B)$, deci N este mijlocul arcului BC.

b) Punctul N este „polul nord" al cercului circumscris. Omotetia de centru T care duce cercul circumscris în cel mixtliniar duce punctul N în „polul nord" al cercului mixtliniar. Omotetia directă care duce cercul mixtliniar în cel înscris are centrul în intersecţia tangentelor exterioare comune acestora, adică în A. Atunci punctul A, „polul nord" al cercului înscris (punctul T' din problema 2.8) şi „polul nord" al cercului mixtliniar sunt coliniare. Tot problema 2.8 arată că punctele A, T', E sunt coliniare. De aici rezultă concluzia.



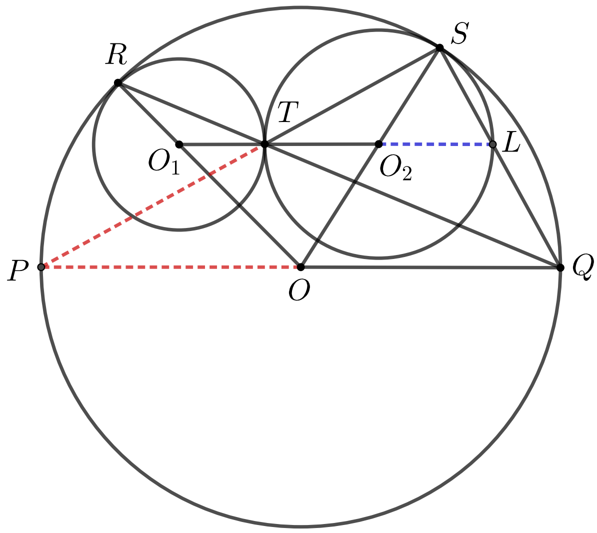
Problema 2.13

Două cercuri, ω_1 şi ω_2 sunt tangente exterior în punctul T şi tangente interior unui cerc Ω în punctele R, respectiv S. Fie Q al doilea punct de intersecţie a dreptei RT cu cercul Ω. Demonstraţi că $m(\sphericalangle QST) = 90°$.

Vă vom prezenta două soluţii care se bazează pe omotetiile dintre cele trei cercuri. Ele încep la fel. Notăm cu O_1, O_2 şi O centrele cercurilor ω_1, ω_2, respectiv Ω. O remarcă banală: omotetia inversă care duce ω_1 în ω_2 are centrul în T. Ea duce O_1 în O_2, deci O_1, T, O_2 sunt coliniare. Omotetia directă care duce ω_1 în Ω are centrul în R. Ea duce O_1 în O şi T în Q, deci R, O_1, O sunt coliniare şi $O_1T \parallel OQ$.

Continuarea 1: Omotetia directă dintre cercurile ω_2 şi Ω are centrul în S. Ea duce O_2 în O şi T în $P \in \Omega \cap ST$ astfel încât $OP \parallel O_2T$. Din axioma paralelelor rezultă că P, O, Q sunt coliniare, adică $[PQ]$ este diametru al lui Ω. Atunci $m(\sphericalangle QST) = m(\sphericalangle QSP) = 90°$.

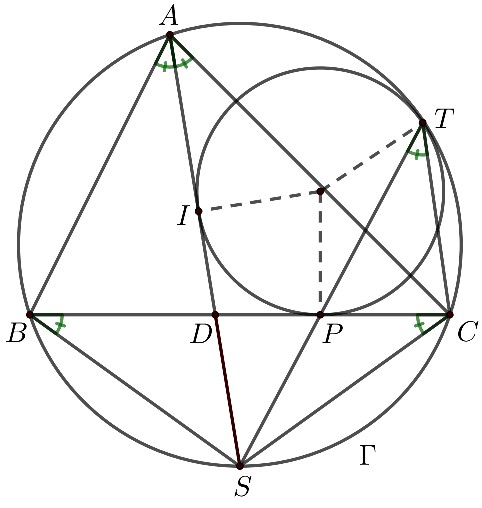
Continuarea 2: Omotetia directă dintre cercurile Ω şi ω_2 are centrul în S. Ea duce O în O_2 şi Q în $L \in \omega_2 \cap SQ$ astfel încât $OQ \parallel O_2L$. Din axioma paralelelor rezultă că O_1, T, O_2, L sunt coliniare, adică $[TL]$ este diametru al lui ω_2. Atunci $m(\sphericalangle QST) = m(\sphericalangle LST) = 90°$.



Problema 2.14

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, Γ cercul circumscris acestuia şi D piciorul bisectoarei din A. Cercurile ω_1 şi ω_2 sunt tangente la AD, BD şi Γ, respectiv lui AD, CD şi Γ. Demonstraţi că ω_1 şi ω_2 se intersectează în I.

Fie $\{T\} = \omega_2 \cap \Gamma$. Omotetia de centru T care duce cercul mic în cel circumscris, duce „polul sud” al primului cerc, P, în „polul sud” al cercului circumscris (adică în punctul S, mijlocul arcului BC; vezi problema 2.10). Aşadar, $S \in AI$. Dacă I_0 este punctul de contact dintre ω_2 şi AI, din puterea punctului S faţă de cercul ω_2 rezultă $SI_0^2 = SP \cdot ST$. Pe de altă parte, $\sphericalangle BCS \equiv \sphericalangle BAS \equiv \sphericalangle CAS \equiv \sphericalangle CTS$. Atunci triunghiurile CPS şi TCS sunt asemenea, deci $SC^2 = SP \cdot ST$. Rezultă că $SC = SI_0$, ori se ştie (vezi incenter-excenter lemma) că punctul de pe (SA care are proprietatea că $SI_0 = SB = SC$ este punctul I. Aşadar, $I_0 = I$, adică ω_2 este tangent dreptei AI tocmai în I.



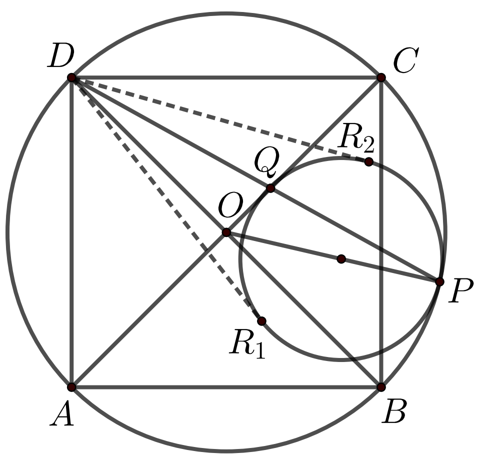
Analog rezultă că ω_1 este tangentă dreptei AI în I, de unde concluzia problemei.

Remarci: Dacă O_1 şi O_2 sunt centrele cercurilor ω_1 şi ω_2, atunci, evident, $I \in O_1O_2$. Acest rezultat rămâne valabil şi dacă $D \in [BC]$ nu este piciorul bisectoarei. (Teorema Sawayama-Thébault)
Pe de altă parte, dacă D nu mai este piciorul bisectoarei şi notăm $\omega_2 \cap AD = \{R\}$, atunci $I \in PR$ (lema lui Sawayama).
Teorema lui Nixon este un caz particular al acestei leme ($D = B$).
Pe de altă parte, această problemă este un caz particular al unei alte probleme discutate azi. Care?

Problema 2.15

Fie $ABCD$ un pătrat înscris în cercul Ω şi P un punct pe arcul mic BC. Cercul ω este tangent cercului Ω în punctul P şi diagonalei $[AC]$ în punctul Q. Fie R un punct pe ω_2 astfel încât DR este tangentă la ω. Demonstraţi că $DR = DA$.

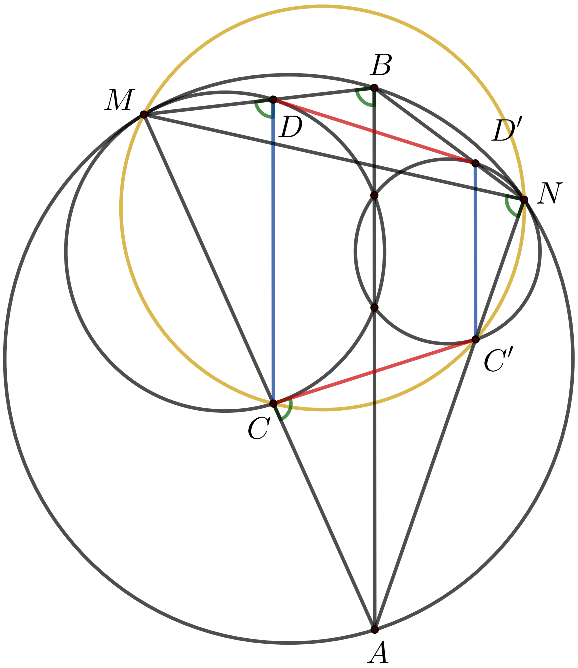
Problema este un caz particular ar problemelor 2.9 şi 2.14.
Ea rezultă şi folosind problema 2.10: (PQ este bisectoarea $\sphericalangle APC$. Totodată, $DC = DA$ arată că (PD este bisectoarea $\sphericalangle APC$, deci P, Q, D sunt coliniare. Asta se putea vedea şi observând că tangenta în D la Ω este paralelă cu tangenta în Q la ω, deci cele două puncte se corespund prin omotetia care duce Ω în ω (şi are centrul în P). Sunt două poziţii posibile pentru R (marcate R_1 şi R_2 în figură). Atunci $DR^2 = DQ \cdot DP$ (puterea punctului D faţă de ω). În fine, $m(\sphericalangle DCQ) = 45° = m(\sphericalangle DPC)$ arată că $\Delta\, DCQ \sim \Delta\, DPC$, de unde $DC^2 = DQ \cdot DP = DR^2$.



Problema 2.16

Două cercuri, Γ_1 şi Γ_2 sunt în interiorul cercului Γ şi sunt tangente acestuia în punctele M, respectiv N. Dreapta care trece prin cele două puncte de intersecţie a cercurilor Γ_1 şi Γ_2 intersectează Γ în A şi B. Dreptele MA şi MB întersectează a doua oară Γ_1 în C şi D, iar NA şi NB reintersectează Γ_2 în C', respectiv D'. Arătaţi că CC' şi DD' sunt tangente cercurilor Γ_1 şi Γ_2.

Omotetia de centru M care duce Γ_1 în Γ duce $[CD]$ în $[AB]$, deci $CD \parallel AB$. Analog, $C'D' \parallel AB$, deci $C'D' \parallel CD$.
Deoarece A se află pe axa radicală a cercurilor Γ_1 şi Γ_2, A are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri, adică $AC \cdot AM = AC' \cdot AN$. Rezultă că $MCC'N$ este patrulater inscriptibil. Atunci $\sphericalangle ACC' \equiv \sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle CDM$, ceea ce arată că CC' este tangentă la Γ_1. Analog, CC' este tangentă la Γ_2 deci este tangentă comună exterioară a celor două cercuri. La fel şi DD'.



Corolar (exerciţiu uşor folosind problema de mai sus)
Dacă, în plus, Γ_1 trece prin centrul cercului Γ_2, atunci CD este tangent lui Γ_2.
(IMO 1999, vezi *Homothety*)

§2.3 Concluzie

Omotetia este un fel de asemănare. Tot ce se poate argumenta cu ajutorul unei omotetii se poate traduce şi în limbaj de asemănări, dar este posibil să fie mai lung şi mai greu de văzut (construcţii auxiliare). Când două figuri sunt omotetice, este deseori util să identificăm centrul omotetiei şi punctele de pe cele două figuri care se corespund. În acest limbaj, al omotetiilor, vedem mai clar, putem merge mai direct la esenţă.

§3 Probleme propuse

Problema 3.1

Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel CD$. În exteriorul acestuia se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi CDF. Dacă X este punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului, demonstraţi că punctele E, X, F sunt coliniare.

Problema 3.2

Fie ABC un triunghi şi A', B', C' punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Fie A'' mijlocul arcului BC care nu-l conţine pe A al cercului circumscris triunghiului ABC. Analog se definesc punctele B'' şi C''. Demonstraţi că dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

Problema 3.3

Fie d o dreaptă. Cercurile ω_1 şi ω_2 sunt tangente dreptei d în punctele A, respectiv B, şi se află de aceeaşi parte a dreptei d. Cercul ω este tangent exterior cercurilor ω_1 şi ω_2 în punctele C, respectiv D. Demonstraţi că dreptele AC şi BD se intersectează într-un punct al cercului ω.

Problema 3.4

Fie Ω cercul circumscris triunghiului ABC. Cercul ω este tangent laturilor AC şi BC, şi este tangent interior cercului Ω în punctul P. O dreaptă paralelă cu AB şi care intersectează interiorul triunghiului ABC este tangentă cercului ω în punctul Q. Demonstraţi că unghiurile $\sphericalangle ACP$ şi $\sphericalangle QCB$ sunt congruente.

Problema 3.5

Fie ABC un triunghi şi M mijlocul laturii $[BC]$. Cercul înscris are centrul în I şi este tangent laturii BC în punctul D. Fie N mijlocul lui $[AD]$. Demonstraţi că punctele N, I şi M sunt coliniare.

Problema 3.6

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi P un punct în interiorul acestuia. Fie E, F, G, H proiecţiile punctului P pe dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Cercurile cu centrele în E şi F care trec prin P se taie a doua oară în K. Cercurile cu centrele în F şi G care trec prin P se taie a doua oară în L. Cercurile cu centrele în G şi H care trec prin P se taie a doua oară în M. Cercurile cu centrele în H şi E care trec prin P se taie a doua oară în N. Demonstraţi că punctele K, L, M, N sunt conciclice.

Problema 3.7

Două cercuri congruente sunt tangente interior unui cerc mai mare în punctele A şi B. Fie M un punct pe cercul mare. Dacă MA şi MB intersectează cercurile mai mici corespunzătoare în A' şi B', demonstraţi că $A'B'$ este paralelă cu AB.

Problema 3.8

Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul ω, $\{K\} = AB \cap CD$, $\{N\} = AD \cap BC$. Arătaţi că cercul circumscris triunghiului AKN este tangent cercului ω dacă şi numai dacă cercul circumscris triunghiului CKN este tangent cercului ω.

Problema 3.9

Fie ABC un triunghi, O şi I centrul cercului circumscris, respectiv înscris în triunghi, iar M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Dacă H' este ortocentrul triunghiului MNP, arătaţi că punctele O, I şi H' sunt coliniare.

Problema 3.10

Fie O_1 şi O_2 două cercuri tangente exterior unui cerc O, punctele de tangenţă fiind A, respectiv B. Fie C şi D puncte pe O_1, respectiv O_2 astfel încât dreapta CD este o tangentă comună exterioară a celor două cercuri. Dacă $\{E\} = AC \cap BD$, atunci $E \in O$ şi tangenta în E la O este paralelă cu CD.

§4 Referinţe

- Ionuţ Onişor – *Transformări geometrice. Omotetia şi inversiunea*, Ed. MatrixRom, 2009
- Evan Chen – *A Guessing Game: Mixtilinear Incircles*, 2015
- Jean-Louis Ayme – http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Mixtilinear1.pdf
- Jafet Baca – *On Mixtlinear Incircles*, AoPS, 2018
- Kin-Yin Li – *Homothety*, Mathematical Excalibur, Vol. 9, No. 4, 2004