BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 20 aprilie 2019 (barajul 4)

Problema 1. **a)** Dacă x este un număr real pozitiv, demonstraţi că

$$\frac{x^{12}-1}{4} \geq \frac{x^3-1}{x}.$$

b) Dacă a şi b sunt numere reale pozitive, demonstraţi că

$$\frac{a^{12}+b^{12}}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}.$$

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB > 2BC$. Fie M un punct pe latura AB astfel încât $AM = BC$ şi fie N un punct pe semidreapta $(CB$ astfel încât $CN = MB$. Paralela prin A la CM intersectează CD în P. Fie K punctul de intersecţia a dreptelor CM şi AN. Demonstraţi că:
a) $AP = PN$;
b) punctele A, K, M, D sunt conciclice.

Problema 3. La un turneu de baschet participă numai echipe din Limassol şi Nicosia. Numărul echipelor din Nicosia este cu 9 mai mare decât cel al echipelor din Limassol. Oricare două echipe joacă una împotriva celeilalte exact o dată. Echipa câştigătoare obţine un punct, cea pierzătoare 0 puncte şi nu există rezultate de egalitate. Numărul total de puncte obţinute de echipele din Nicosia a fost de 9 ori mai mare decât numărul total de puncte obţinute de echipele din Limassol. Determinaţi numărul maxim posibil de victorii ale celei mai bine clasate echipe din Limassol.

Problema 4. Găsiţi 10 numere prime diferite care divid numărul

$$A = 11111^{60} - 10009^{60}.$$

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii:

Problema 1. a) Dacă x este un număr real pozitiv, demonstraţi că

$$\frac{x^{12}-1}{4} \geq \frac{x^3-1}{x}.$$

b) Dacă a şi b sunt numere reale pozitive, demonstraţi că

$$\frac{a^{12}+b^{12}}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}.$$

Soluţie: a) (*Marius Valentin Drăgoi*)
Inegalitatea din enunţ se rescrie echivalent $\dfrac{(x^3-1)(x^9+x^6+x^3+1)}{4} \geq \dfrac{x^3-1}{x}$, sau $\dfrac{x^3-1}{4x} \cdot (x^{10}+x^7+x^4+x-4) \geq 0$, adică $\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{4x} \cdot [(x-1)(x^9+x^8+\ldots+x+1)+(x-1)(x^6+x^5+\ldots+x+1)+(x-1)(x^3+x^2+x+1)+(x-1)] \geq 0$, sau $\dfrac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{4x} \cdot (x^9+x^8+x^7+2x^6+2x^5+2x^4+3x^3+3x^2+3x+4) \geq 0$.

Alternativ, inegalitatea $\dfrac{x^3-1}{4x} \cdot (x^{10}+x^7+x^4+x-4) \geq 0$ se poate demonstra pe cazuri: dacă $x \geq 1$ atunci x^3-1 şi $x^{10}+x^7+x^4+x-4$ sunt pozitive, iar dacă $x \in (0,1)$ atunci ambele sunt negative, deci produsul lor este pozitiv.

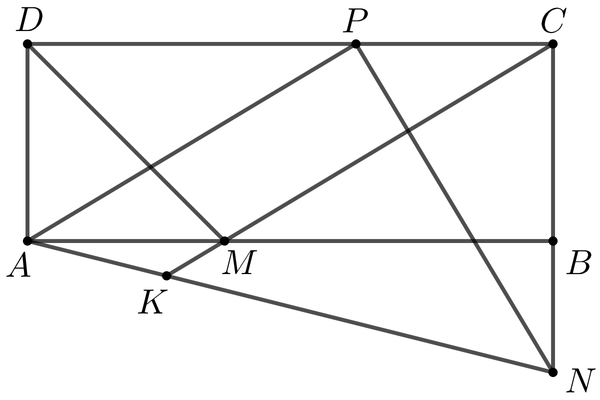
b) Rezultă imediat scriind inegalitatea de la a) pentru a şi b şi adunând inegalităţile obţinute.

Egalităţile au loc pentru $x = 1$, respectiv pentru $a = b = 1$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB > 2BC$. Fie M un punct pe latura AB astfel încât $AM = BC$ şi fie N un punct pe semidreapta $(CB$ astfel încât $CN = MB$. Paralela prin A la CM intersectează CD în P. Fie K punctul de intersecţia a dreptelor CM şi AN. Demonstraţi că:
a) $AP = PN$;
b) punctele A, K, M, D sunt conciclice.

Soluţie:
a) Deoarece $AMCP$ este paralelogram, $AM = BC$ şi $CN = MB$, avem $PC = AM = BC = AD$ şi $PD = BM = CN$. Atunci triunghiurile dreptunghice ADP şi PCN sunt congruente, deci $AP = PN$.
b) Din această congruenţă de triunghiuri rezultă $\sphericalangle DPA \equiv \sphericalangle CNP$ şi $\sphericalangle DAP \equiv \sphericalangle CPN$. Avem $m(\sphericalangle DPA) + m(\sphericalangle DAP) = 90°$, deci $m(\sphericalangle DAP) + m(\sphericalangle CPN) = 90°$. Rezultă că $m(\sphericalangle APN) = 90°$, deci triunghiul APN este dreptunghic isoscel. Rezultă că $m(\sphericalangle PNA) = m(\sphericalangle PAN) = 45°$.

Din $CK \parallel AP$ rezultă $m(\sphericalangle CKN) = m(\sphericalangle PAN) = 45^\circ \quad (1)$.
Triunghiul ADM este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle ADM) = 45^\circ \quad (2)$.
Din (1) şi (2) rezultă $\sphericalangle CKN \equiv \sphericalangle ADM$, ceea ce arată că punctele A, K, M şi D sunt conciclice.



Problema 3. La un turneu de baschet participă numai echipe din Limassol şi Nicosia. Numărul echipelor din Nicosia este cu 9 mai mare decât cel al echipelor din Limassol. Oricare două echipe joacă una împotriva celeilalte exact o dată. Echipa câştigătoare obţine un punct, cea pierzătoare 0 puncte şi nu există rezultate de egalitate. Numărul total de puncte obţinute de echipele din Nicosia a fost de 9 ori mai mare decât numărul total de puncte obţinute de echipele din Limassol. Determinaţi numărul maxim posibil de victorii ale celei mai bine clasate echipe din Limassol.

Soluţie:
Notăm cu x numărul echipelor din Limassol. Atunci numărul de echipe din Nicosia va fi $x+9$.
Cele x echipe din Limassol au jucat între ele $\dfrac{x(x-1)}{2}$ meciuri. Să presupunem că echipele din Limassol au obţinut k puncte din confruntările cu echipele din Nicosia. Atunci numărul total de puncte obţinute de echipele din Limassol va fi $\dfrac{x(x-1)}{2} \cdot 1 + k$.
Cele $x+9$ echipe din Nicosia au jucat între ele $\dfrac{(x+8)(x+9)}{2}$ partide.
Atunci numărul total de puncte obţinute de echipele din Nicosia va fi

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2} \cdot 1 + x(x+9) \cdot 1 - k.$$

Obţinem ecuaţia

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2} \cdot 1 + x(x+9) \cdot 1 - k = 9 \left[\frac{x(x-1)}{2} \cdot 1 + k \right]$$

$$\iff \frac{x^2+17x+72}{2} + x^2 + 9x - k = 9\left(\frac{x^2-x}{2} + k\right)$$
$$\iff x^2 + 17x + 72 + 2x^2 + 18x - 2k = 9x^2 - 9x + 18k$$
$$\iff 6x^2 - 44x + 20k - 72 = 0 \iff 3x^2 - 22x + 10k - 36 = 0.$$

Deoarece x trebuie să fie număr natural, discriminantul acestei ecuaţii trebuie să fie pătrat perfect. Dar

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (10k - 36) = 916 - 120k = 4(229 - 30k),$$

deci trebuie $229 - 30k \geq 0$, adică $k \leq \frac{229}{30}$, deci $k \leq 7$.
Singurele valori ale lui k pentru care Δ este pătrat perfect sunt $k = 2$ şi $k = 6$.
• Dacă $k = 2$, atunci $x = 8$, deci cea mai bună echipă din Limassol a obţinut în total cel mult $7 + 2 = 9$ victorii.
• Dacă $k = 6$, atunci $x = 6$, deci cea mai bună echipă din Limassol a obţinut în total cel mult $5 + 6 = 11$ victorii.

Problema 4. Găsiţi 10 numere prime diferite care divid numărul

$$A = 11111^{60} - 10009^{60}.$$

Soluţie: Numărul $A = 11111^{60} - 10009^{60}$ este divizibil cu $11111 - 10009 = 1102 = 2 \cdot 19 \cdot 29$, deci A este divizibil cu numerele prime 2, 19 şi 29.
Deoarece 3 nu divide 11111, conform micii teoreme a lui Fermat, $11111^2 \equiv 1 \pmod 3$, deci $11111^{60} \equiv 1 \pmod 3$. La fel, $10009^{60} \equiv 1 \pmod 3$, deci $A = 11111^{60} - 10009^{60} \equiv 0 \pmod 3$. Aşadar 3 este un alt număr prim care îl divide pe A.
Similar, folosind faptul că numerele prime $5, 7, 11, 13, 31, 61$ nu divid niciunul din numerele 11111 şi 10009, conform micii teoreme a lui Fermat,

$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^4)^{15} - (10009^4)^{15} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 5$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^6)^{10} - (10009^6)^{10} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 7$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^{10})^{6} - (10009^{10})^{6} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^{12})^{5} - (10009^{12})^{5} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^{30})^{2} - (10009^{30})^{2} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{31}$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{61}.$$

Aşadar, numărul $A = 11111^{60} - 10009^{60}$ este divizibil cu fiecare din numerele prime $2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 29, 31, 61$.

Remarcă: Dintre ceilalţi factori primi ai lui A, cei mai mici sunt 43 şi 101.