BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid"
Cipru, 2 martie 2019 (barajul 3)

Problema 1. Determinaţi toate numerele prime p pentru care 7 **nu divide** numărul $p^3 + 2p^2 - 5p + 1$ şi pentru care $p^3 + 5p^2 + 2p - 1$ este număr prim.

Problema 2. Considerăm un punct M pe semicercul de diametru AB şi centru O. Construim un triunghi echilateral AMC astfel încât M şi C sunt de aceeaşi parte a lui AB şi C este în exteriorul semicercului. Fie D piciorul perpendicularei din B pe AC. Demonstraţi că:
a) $CO = DB$;
b) patrulaterul determinat de mijloacele segmentelor $[CD]$, $[DO]$, $[OB]$ şi $[BC]$ este un romb.

Problema 3. Considerăm următoarea mutare:
Alegem două pătrăţele vecine ale pătratului din stânga în figura de mai jos şi adunăm acelaşi număr întreg numerelor din respectivele pătrăţele.
Determinaţi dacă există o succesiune de mutări care transformă pătratul din stânga în cel din dreapta.
Notă: Două pătrăţele sunt considerate vecine dacă au o latură comună.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

11	12	13
14	15	16
17	18	19

Problema 4. Considerăm numerele reale $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ astfel încât

$$(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_5 - x_4)^2 + (x_6 - x_5)^2 = 1.$$

Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a expresiei $(x_4+x_5+x_6)-(x_1+x_2+x_3)$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi toate numerele prime p pentru care 7 **nu divide** numărul p^3+2p^2-5p+1 şi pentru care p^3+5p^2+2p-1 este număr prim.

Soluţie:
Pentru orice număr prim p, notăm $a_p = p^3+2p^2-5p+1$ şi $b_p = p^3+5p^2+2p-1$. În tabelul de mai jos sunt reprezentate resturile la împărţirea cu 7 a numerelor p, a_p şi b_p:

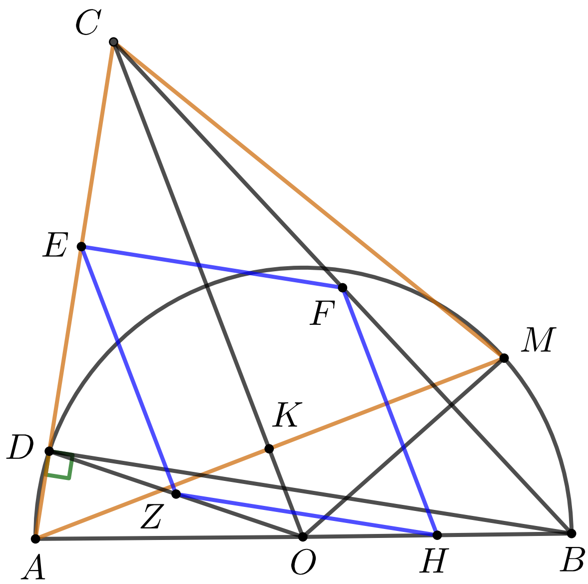
p	0	1	2	3	4	5	6
p^3+2p^2-5p+1	1	6	0	3	0	4	0
p^3+5p^2+2p-1	6	0	3	0	4	0	1

Din tabelul de mai sus se vede că dacă $p \equiv 2,4,6 \pmod 7$ atunci $7 \mid a_p$, deci p nu satisface condiţia din enunţ.
Tot din tabel se vede că dacă $p \equiv 1,3,5 \pmod 7$, atunci $7 \mid b_p$. Evident, $b_p > 7$, deci în acest caz b_p nu este prim, prin urmare nici aceste numere p nu satisfac condiţiile din enunţ.
Rămâne cazul $p \equiv 0 \pmod 7$, adică $p=7$. În acest caz $a_p \equiv 1 \pmod 7$, iar $b_7 = 601$ care este într-adevăr număr prim.
Aşadar, singurul număr p cu proprietatea din enunţ este $p=7$.

Problema 2. Considerăm un punct M pe semicercul de diametru AB şi centru O. Construim un triunghi echilateral AMC astfel încât M şi C sunt de aceeaşi parte a lui AB şi C este în exteriorul semicercului. Fie D piciorul perpendicularei din B pe AC. Demonstraţi că:
a) $CO = DB$;
b) patrulaterul determinat de mijloacele segmentelor $[CD]$, $[DO]$, $[OB]$ şi $[BC]$ este un romb.

Soluţie:
a) Fie $\{K\} = CO \cap AM$. CO este mediatoarea lui $[AM]$ deoarece $CA = CM$ şi $OA = OM$. Totodată, CO este mediană în triunghiul ABC. Atunci $\mathscr{A}_{\Delta ABC} = 2 \cdot \mathscr{A}_{\Delta AOC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CO \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot AC$. Pe de altă parte, $\mathscr{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$, de unde rezultă că $CO = BD$.

b) Fie E, Z, H, F mijloacele segmentelor $[CD]$, $[DO]$, $[OB]$, respectiv $[BC]$. Atunci $[EZ]$ şi $[HF]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile DCO, respectiv BCO, deci $EZ = HF = \frac{CO}{2}$. Totodată, $[ZH]$ şi $[FE]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile OBD, respectiv CBD, deci $ZH = FE = \frac{BD}{2}$. Din a) rezultă că $EZ = ZH = HF = FE$, adică $EZHF$ este romb.

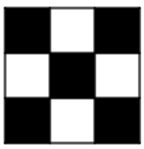


Problema 3. Considerăm următoarea mutare:
Alegem două pătrăţele vecine ale pătratului din stânga în figura de mai jos şi adunăm acelaşi număr întreg numerelor din respectivele pătrăţele.
Determinaţi dacă există o succesiune de mutări care transformă pătratul din stânga în cel din dreapta.
Notă: Două pătrăţele sunt considerate vecine dacă au o latură comună.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

11	12	13
14	15	16
17	18	19

Soluţie:
Colorăm pătrăţelele unitate ale celor două pătrate după modelul tablei de şah:



Observăm că la fiecare mutare adunăm acelaşi număr la un pătrăţel alb şi la unul negru. Dacă N este suma numerelor din pătraţelele negre şi A este suma numerelor din pătrăţelele albe, atunci $N - A$ rămâne constantă după fiecare mutare. Dar în pătratul din stânga avem $N - A = 5$, în timp ce în pătratul din dreapta avem $N - A = 15$. Deci nu există o succesiune de mutări care să transforme pătratul din stânga în cel din dreapta.

Problema 4. Considerăm numerele reale $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ astfel încât

$$(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_5 - x_4)^2 + (x_6 - x_5)^2 = 1.$$

Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a expresiei $(x_4+x_5+x_6)-(x_1+x_2+x_3)$.

Soluţie:
Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz avem:
$(1^2+2^2+3^2+2^2+1^2)(|x_1-x_2|^2+|x_2-x_3|^2+|x_3-x_4|^2+|x_4-x_5|^2+|x_5-x_6|^2) \geq \big(1\cdot|x_1-x_2|+2\cdot|x_2-x_3|+3\cdot|x_3-x_4|+2\cdot|x_4-x_5|+1\cdot|x_5-x_6|\big)^2$, deci $19 \geq \big(|x_1-x_2|+2\cdot|x_2-x_3|+3\cdot|x_3-x_4|+2\cdot|x_4-x_5|+|x_5-x_6|\big)^2$.
Rezultă că $\sqrt{19} \geq |x_1-x_2|+2\cdot|x_2-x_3|+3\cdot|x_3-x_4|+2\cdot|x_4-x_5|+|x_5-x_6|$, adică $\sqrt{19} \geq (x_4+x_5+x_6)-(x_1+x_2+x_3)$, ceea ce arată că valoarea maximă a diferenţei $(x_4+x_5+x_6)-(x_1+x_2+x_3)$ este cel mult $\sqrt{19}$.
Acest maxim este atins dacă $x_2-x_1=\dfrac{1}{\sqrt{19}}$, $x_3-x_2=\dfrac{2}{\sqrt{19}}$, $x_4-x_3=\dfrac{3}{\sqrt{19}}$, $x_5-x_4=\dfrac{2}{\sqrt{19}}$ şi $x_6-x_5=\dfrac{1}{\sqrt{19}}$, adică de exemplu pentru $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{19}}, \dfrac{3}{\sqrt{19}}, \dfrac{6}{\sqrt{19}}, \dfrac{8}{\sqrt{19}}, \dfrac{9}{\sqrt{19}}\right)$.

Remarcă: Aceeaşi soluţie, scrisă altfel:
Notând $x_2-x_1=a$, $x_3-x_2=b$, $x_4-x_3=c$, $x_5-x_4=d$ şi $x_6-x_5=e$, avem $x_2=x_1+a$, $x_3=x_1+a+b$, $x_4=x_1+a+b+c$, $x_5=x_1+a+b+c+d$ şi $x_6=x_1+a+b+c+d+e$. Ştim că $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ şi căutăm maximul expresiei $(x_4+x_5+x_6)-(x_1+x_2+x_3)=a+2b+3c+2d+e$. Acum este natural să aplicăm, CBS numerelor a,b,c,d,e şi $1,2,3,2,1$.
Obţinem $(a+2b+3c+2d+e)^2 \leq (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)(1^2+2^2+3^2+2^2+1^2) = 19$, deci maximul căutat este $\sqrt{19}$, atins atunci când $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}=\dfrac{d}{2}=\dfrac{e}{1}$ cu $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$, deci pentru $a=\dfrac{1}{\sqrt{19}}$, $b=\dfrac{2}{\sqrt{19}}$, $c=\dfrac{3}{\sqrt{19}}$, $d=\dfrac{2}{\sqrt{19}}$, $e=\dfrac{1}{\sqrt{19}}$, adică pentru $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2=x_1+\dfrac{1}{\sqrt{19}}$, $x_3=x_1+\dfrac{3}{\sqrt{19}}$, $x_4=x_1+\dfrac{6}{\sqrt{19}}$, $x_5=x_1+\dfrac{8}{\sqrt{19}}$, $x_6=x_1+\dfrac{9}{\sqrt{19}}$.