Problema 1. Determinaţi toate tripletele (x, y, n), în care x şi y sunt numere naturale nenule, iar p este un număr prim, care satisfac relaţia

$$x^5 + x^4 + 1 = p^y.$$

Titu Andreescu

Soluţie:
Deoarece $x^5+x^4+1 = x^5+x^4+x^3-x^3-x^2-x+x^2+x+1 = (x^2+x+1)(x^3-x+1)$, trebuie ca x^2+x+1 şi x^3-x+1 să fie puteri ale numărului prim p.
Dacă d divide şi x^2+x+1 şi x^3-x+1, atunci d divide $x(x^2+x+1)-(x^3-x+1) = x^2+2x-1$, deci şi $x^2+2x-1-(x^2+x+1) = x-2$. Atunci d divide şi $x^2+x+1-(x+3)(x-2) = 7$. Aşadar, unul dintre numerele x^2+x+1 şi x^3-x+1 este 1 sau 7.
$x^2+x+1 = 1$ nu este posibil, iar $x^2+x+1 = 7$ implică $x = 2$ ($x = 1$ nu verifică, iar $x > 2$ implică $x^2+x+1 > 2^2+2+1 = 7$). Obţinem soluţia $x = 2$, $y = 2$, $p = 7$.
$x^3-x+1 = 1$ conduce la soluţia $x = 1$, $y = 1$, $p = 3$, iar $x^3-x+1 = 7$ nu are soluţii ($x = 1$ şi $x = 2$ nu verifică ecuaţia, iar pentru $x \geq 3$ avem $x^3-x+1 = x(x^2-1)+1 \geq 3(3^2-1)+1 = 25 > 7$).
Aşadar, singurele soluţii sunt $x = y = 1$, $p = 3$ şi $x = y = 2$, $p = 7$.

Problema 2. Arătaţi că pentru orice $a, b \geq 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

Olimpiadă Cehia şi Slovacia, 2014

Soluţie:
Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, forma Titu Andreescu (sau Bergström), avem

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{b^2}{b\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}},$$

deci este suficient să demonstrăm că $\dfrac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}} \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$.

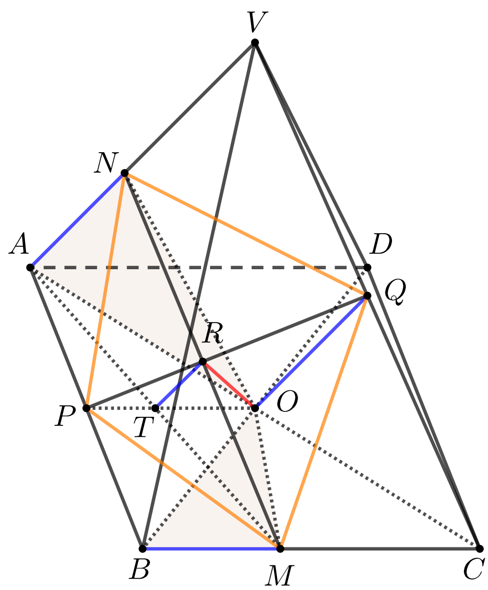
Ultima inegalitate este echivalentă cu $(a+b)\sqrt{ab+1} \geq a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$. Prin ridicare la pătrat şi reducerea termenilor asemenea, inegalitatea precedentă revine la $a^3b+b^3a+2ab \geq 2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$, deci la $a^2+b^2+2 \geq 2\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$ care este tocmai inegalitatea mediilor scrisă pentru numerele a^2+1 şi b^2+1.
Egalitatea are loc dacă $a = b$.

Problema 3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful în V şi având toate muchiile congruente. Pe muchiile $[BC]$ şi $[VA]$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AN = BM$. Notăm cu P şi Q mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[VC]$.
a) Arătaţi că punctele P, M, Q şi N sunt coplanare.
b) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, iar $\{R\} = MN \cap PQ$, arătaţi că $OR \perp MN$.
c) Demonstraţi că minimul distanţei de la O la dreapta MN se atinge atunci când M şi N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[VA]$.

Concursul centrelor de excelenţă din Moldova, Suceava, 2008

Soluţie:
a) Fie T şi R mijloacele segmentelor $[AM]$, respectiv $[MN]$.
Atunci $[RT]$ este linie mijlocie în triunghiul MNA, iar $[OQ]$ este linie mijlocie în triunghiul CVA, deci $RT \parallel AN \parallel OQ$. Aşadar, punctele O, P, Q, R, T sunt coplanare. Arătăm că P, R, Q sunt coliniare.
Avem $TR = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}BM = PT$ şi $PO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AV = OQ$, deci $\frac{RT}{OQ} = \frac{PT}{PO}$, ceea ce, împreună cu $RT \parallel OQ$, arată că triunghiurile PTR şi POQ sunt asemenea, deci P, Q, R sunt coliniare. Aşadar, dreptele MN şi PQ se intersectează în R, deci sunt coplanare.

b) Avem $\Delta\, AVC \equiv \Delta\, ABC$ (CC), deci $m(\sphericalangle VAC) = m(\sphericalangle BAC) = 45°$. Deducem că $\Delta\, ONA \equiv \Delta\, OMB$ (LUL), deci $OM = ON$. Rezultă că triunghiul OMN este isoscel, deci mediana OR este şi înălţime.



c) Deoarece $R \in (PQ)$, iar triunghiul OPQ este isoscel, cu $OP = OQ$, minimul distanţei OR de la O la dreapta MN se atinge atunci când R este mijlocul lui $[PQ]$, adică atunci când $MQNP$ este paralelogram. Atunci planele (VBC) şi (VAB) care conţin dreptele paralele QM, respectiv PN, se intersectează după o dreaptă paralelă cu acestea. Aşadar, rezultă $QM \parallel VB \parallel NP$, deci M şi N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[VA]$.

Problema 4. O submulţime S a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ se numeşte găurită dacă există numere naturale $a < b < c$ astfel încât $a, c \in S$, $b \notin S$. Câte submulţimi găurite există?

Soluţie: În total, mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ are $2^{2020} - 1$ submulţimi nevide. Dintre acestea, unele sunt găurite, celelalte sunt intervale de numere naturale, adică mulţimi de forma $\{m, m+1, \ldots, m+k\}$, unde $1 \leq m \leq m+k \leq 2020$.
Să numărăm intervalele:
- dacă $m = 1$, k poate fi $0, 1, 2, \ldots, 2019$, deci sunt 2020 de intervale;
- dacă $m = 2$, k poate fi $0, 1, 2, \ldots, 2018$, deci sunt 2019 intervale;
- dacă $m = 3$, k poate fi $0, 1, 2, \ldots, 2017$, deci sunt 2018 intervale;

ş.a.m.d.
- dacă $m = 2019$, k poate fi 0 sau 1, deci sunt 2 intervale;
- dacă $m = 2020$, k trebuie să fie 0, deci avem un interval.

Aşadar, avem în total $1 + 2 + 3 + \ldots + 2019 + 2020 = 2021 \cdot 1010$ intervale, deci $2^{2020} - 1 - 2021 \cdot 1010$ mulţimi găurite.