Problema 1. Determinaţi toate tripletele (x, y, n), în care x şi y sunt numere naturale nenule, iar p este un număr prim, care satisfac relaţia

$$x^5 + x^4 + 1 = p^y.$$

Problema 2. Arătaţi că pentru orice $a, b \geq 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

Problema 3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful în V şi având toate muchiile congruente. Pe muchiile $[BC]$ şi $[VA]$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AN = BM$. Notăm cu P şi Q mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[VC]$.
a) Arătaţi că punctele P, M, Q şi N sunt coplanare.
b) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, iar $\{R\} = MN \cap PQ$, arătaţi că $OR \perp MN$.
c) Demonstraţi că minimul distanţei de la O la dreapta MN se atinge atunci când M şi N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[VA]$.

Concursul centrelor de excelenţă din Moldova, Suceava, 2008

Problema 4. O submulţime S a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ se numeşte găurită dacă există numere naturale $a < b < c$ astfel încât $a, c \in S$, $b \notin S$. Câte submulţimi găurite există?