Problema 1. Determinaţi toate numerele prime $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ care verifică

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

Titu Andreescu

Soluţie: Un pătrat perfect poate da la împărţirea cu 3 unul din resturile 0 sau 1. Cum $p_1 > 3$, p_1 nu este divizibil cu 3, deci $p_1^2 \equiv 1 \pmod 3$. Dacă printre numerele p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sunt n numere diferite de 3 ($0 \leq n \leq 5$), atunci $p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \equiv n \pmod 3$, deci trebuie $n \equiv 1 \pmod 3$, adică $n = 1$ sau $n = 4$.

Dacă $n = 1$, adică 4 dintre numerele p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sunt egale cu 3, atunci, dacă de pildă $p_2 \neq 3$, trebuie ca $p_1^2 = p_2^2 + 4 \cdot 3^2$. Rezultă că $(p_1 - p_2)(p_1 + p_2) = 36$. Cum $p_1 - p_2 < p_1 + p_2$, cei doi factori au aceeaşi paritate, iar diferenţa lor, $2p_2$, nu este multiplu de 3, ar trebui ca $p_1 - p_2 = 2$ şi $p_1 + p_2 = 18$, dar asta conduce la $p_1 = 10$ care nu este prim.

Rămâne că $n = 4$. Să presupunem că $p_6 = 3$. Atunci $p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + 9$. Examinăm această ecuaţie modulo 8. Ştim că un pătrat perfect poate da resturile 0, 1 sau 4 la împărţirea cu 8, iar pătratul unui număr prim poate da numai restul 1 dacă e impar sau 4 dacă este 2. Evident, $p_1^2 \equiv 1 \pmod 8$, iar $p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + 9 \equiv m \pmod 8$, unde m este numărul de numere impare aflate printre numerele p_2, p_3, p_3, p_5, p_6. Deducem că în mod necesar $m = 1$, adică $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 2$. În acest caz $p_1^2 = 4 \cdot 2^2 + 3^2 = 25$, deci $p_1 = 5$. În concluzie, $p_1 = 5$, unul dintre numerele p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 este egal cu 3, iar celelalte patru sunt egale cu 2.

Problema 2. Aflaţi partea întreagă a numărului

$$S = \sqrt{1^2 + \frac{2}{1+1}} + \sqrt{2^2 + \frac{2}{2+1}} + \sqrt{3^2 + \frac{2}{3+1}} + \ldots + \sqrt{100^2 + \frac{2}{100+1}}.$$

Soluţie:
Avem $\sqrt{n^2 + \frac{2}{n+1}} < n + \frac{1}{n(n+1)}$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots, 100$. Într-adevăr, ridicând la pătrat inegalitatea precedentă (termenii sunt pozitivi), ea se scrie echivalent $n^2 + \frac{2}{n+1} < n^2 + 2n \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)^2}$, inegalitate evidentă.
Folosind inegalitatea de mai sus pentru $n = 1, 2, \ldots, n$, avem

$$S = \sqrt{1^2 + \frac{2}{1+1}} + \sqrt{2^2 + \frac{2}{2+1}} + \sqrt{3^2 + \frac{2}{3+1}} + \ldots + \sqrt{100^2 + \frac{2}{100+1}} <$$
$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + 2 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + 100 + \frac{1}{100 \cdot 101} =$$

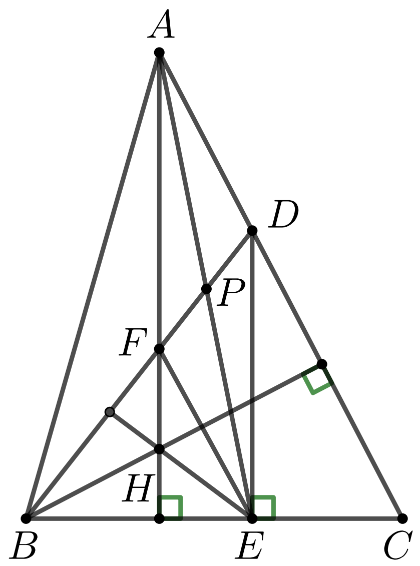
$(1+2+\ldots+100)+\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 101}\right)=5050+1-\frac{1}{100}<5051.$
Pe de altă parte,
$S=\sqrt{1^2+\frac{2}{1+1}}+\sqrt{2^2+\frac{2}{2+1}}+\sqrt{3^2+\frac{2}{3+1}}+\ldots+\sqrt{100^2+\frac{2}{100+1}}>$
$1+2+\ldots+100=5050$, deci partea întreagă cerută este 5050.

Problema 3. Fie ABC un triunghi şi H ortocentrul său. Fie D un punct pe latura (AC) şi E proiecţia lui D pe dreapta BC. Demonstraţi că $EH \perp BD$ dacă şi numai dacă BD trece prin mijlocul lui $[AE]$.

Baltic Way, 2019

Soluţie:
$\boxed{\Rightarrow}$ Presupunem că $EH \perp BD$ şi demonstrăm că BD trece prin mijlocul lui $[AE]$. Fie $\{F\} = BD \cap AH$ (dacă $H = A$, definim $F = A$). Cum $BD \perp EH$ şi $HF \perp BE$, rezultă că F este ortocentrul triunghiului HBE, deci $EF \perp BH$, adică $EF \parallel AC$. Dar, cum $DE \parallel AF$ (ambele perpendiculare pe BC), rezultă că $ADEF$ este paralelogram, deci diagonala $[FD]$ trece prin mijlocul celeilalte diagonale, $[AE]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Presupunem că BD trece prin mijlocul lui $[AE]$ şi demonstrăm că $EH \perp BD$. Fie $\{P\} = AE \cap DF$. Cum $AF \parallel DE$, avem $\sphericalangle FAP \equiv \sphericalangle DEP$, $AP = EP$ şi $\sphericalangle APF \equiv \sphericalangle EPD$, deci triunghiurile APF şi EPD sunt congruente (ULU). Deducem că $FP = PD$, deci $ADEF$ este paralelogram. Cum $BH \perp AC$ şi $EF \parallel AC$, rezultă $EF \perp BH$. Acest fapt, împreună cu $HF \perp BE$, arată că F este ortocentrul triunghiului HBE, deci $BF \perp HE$, adică $EH \perp BD$.



Problema 4. În fiecare din căsuţele unui tabel 6×6 se scrie câte un număr de la 1 la 36 astfel încât fiecare din aceste numere să apară exact o dată.
a) Daţi un exemplu de o completare a tabelului astfel încât suma oricăror două numere aflate pe o aceeaşi linie sau pe o aceeaşi coloană să fie mai mare ca 11.
b) Demonstraţi că, oricum s-ar face completarea tabelului, vor exista mereu două numere situatie fie pe o aceeaşi linie, fie pe o aceeaşi coloană a căror sumă să fie cel mult 12.

Soluţie:
a) Aşezăm numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pe o diagonală, numerele 7 şi 8 la intersecţiile dintre linia lui 5 şi coloana lui 6, respectiv a liniei lui 6 cu coloana lui 5. Numerele 9 şi 10 le plasăm la intersecţia dintre linia lui 4 şi coloanele lui 5, respectiv 6. (vezi figura) Restul numerelor le plasăm în tabel oricum. Se vede uşor că nu există două numere care adunate să dea 11 sau mai puţin.

1					
	2				
		3			
			4	**9**	**10**
				5	**7**
				8	**6**

b) Ne uităm mai întâi la numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dacă două dintre aceste numere se află pe o aceeaşi linie sau o aceeaşi coloană, vom avea automat două numere cu suma cel mult 12 situate pe o aceeaşi linie sau coloană. Aşadar, aceste numere trebuie să stea pe linii şi coloane diferite. Fiind 6 linii, pe fiecare din ele va sta (exact) unul din numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6$. La fel şi pe coloane. Ne uităm acum la numărul 7. Dacă stă pe aceeaşi linie (coloană) cu unul din numerele $1, 2, 3, 4, 5$, avem două numere cu suma cel mult 12 situate pe o aceeaşi linie sau coloană. Deci 7 trebuie să stea pe linia lui 6. La fel, 7 trebuie să stea pe coloana lui 6. Dar aceste două condiţii nu pot fi realizate simultan: la intersecţia liniei lui 6 cu coloana lui 6 se află 6 însuşi, deci nu îl putem scrie pe 7. Aşadar, se vor obţine oricum două numere cu suma cel mult 12.