**Problema săptămânii 184**
Determinaţi cea mai mică valoare a numărului natural $n$, $n \geq 3$, care are următoarea proprietate:
oricum am colora $n$ puncte coliniare $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$ cu două culori, există printre ele trei puncte, $A_i$, $A_j$, $A_{2j-i}$, $1 \leq i < 2j - i \leq n$, care au aceeaşi culoare.

*Olimpiadă Bulgaria*, 1999

**Soluţie:** Răspunsul este 9.
Dacă $n = 8$, putem colora cu prima culoare punctele $A_1$, $A_3$, $A_6$, $A_8$ şi cu cea de-a doua culoare punctele $A_2$, $A_4$, $A_5$ şi $A_7$ (sau, mai simetric, cu prima culoare: $A_1, A_2, A_5, A_6$, cu cea de-a doua, restul).
Putem păstra această colorare pentru $A_1, a_2, \ldots, A_n$ şi dacă $n < 8$.
Dacă $n = 9$ vom avea oricum trei puncte cu proprietatea din enunţ. Ne uităm la punctele $A_4$, $A_5$, $A_6$.
• Dacă au aceeaşi culoare, am terminat.
• Dacă $A_4$ şi $A_6$ au culoarea 1, iar $A_5$ are culoarea 2, atunci $A_2$ şi $A_8$ trebuie să aibă culoarea 2, altminteri s-ar forma un triplet de culoarea 1. Dar atunci $A_2$, $A_5$, $A_8$ formează un triplet de culoarea 2.
• Dacă $A_5$ are aceeaşi culoare cu exact unul din punctele $A_4$ sau $A_6$, de exemplu cu $A_6$, atunci $A_4$ şi $A_7$ au cealaltă culoare. Rezultă că $A_1$ are culoarea lui $A_5$, deci $A_3$ are cealaltă culoare, cea a lui $A_4$. Deducem că $A_2$ are culoarea lui $A_1$, $A_5$, $A_6$. Deducem că $A_9$ are cealaltă culoare, iar $A_8$ culoarea lui $A_2$ şi $A_5$, ceea ce conduce la un triplet de puncte de aceeaşi culoare.

De fapt, aşa cum ne semnalează *Luca Pană*, problema este un caz particular al teoremei lui van der Waerden.

Am primit soluţii de la *Luca Pană, David-Andrei Anghel, Carol-Luca Gasan.*

**Problem of the week no. 184**
Find the least positive integer $n$, $n \geq 3$, that satisfies the following property:
for any coloring in two colors of $n$ distinct collinear points $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$, there exist three points $A_i$, $A_j$, $A_{2j-i}$, $1 \leq i < 2j - i \leq n$, which are colored in the same color.

*Bulgarian Olympiad*, 1999

**Solution:** The answer is 9.
If $n = 8$, we can color with the first color points $A_1, A_2, A_5, A_6$, and with the second color the other points.
We can keep the same coloring for $A_1, a_2, \ldots, A_n$ also in the case when $n < 8$.
If $n = 9$, we must have three points that have the property from the statement. We look at points $A_4$, $A_5$, $A_6$.
• If they are all of the same color, we are done.
• If $A_4$ and $A_6$ have color 1, while $A_5$ has color 2, then $A_2$ and $A_8$ must have color

2, otherwise we would have a triple of points of color 1. Bur then $A_2$, $A_5$, $A_8$ form a triple of points that have color 2.
• If $A_5$ has the same color as exactly one of the points $A_4$ and $A_6$, say $A_6$, then $A_4$ and $A_7$ have a different color. It follows that $A_1$ has the color of $A_5$, therefore $A_3$ has the other color, the one of $A_4$. It follows that $A_2$ has the color of $A_1$, $A_5$, $A_6$. We deduce that $A_9$ has the other color, while $A_8$ has the color of $A_2$ and $A_5$, which leads to a triple of points of the same color.

Actually, as *Luca Pană* points out, the problem is a direct consequence of the well-known theorem of van der Waerden.