Problema săptămânii 183
Arătaţi că niciun număr de forma $7^x - 1$, $x \in \mathbb{N}^*$, nu se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule.

Baltic Way, 2019

Soluţie: (user MarkBcc168 de pe AoPS)
Fie $x = 2^m \cdot n$, unde n este impar. Cum $7^n - 1 \equiv 6 \pmod 8$, există un număr prim $p \equiv 3 \pmod 4$ astfel încât $\nu_p(7^n - 1)$ să fie impar. Din LTE rezultă

$$\nu_p(7^x - 1) = \nu_p(7^n - 1) + \nu_p(2^m) = \nu_p(7^n - 1),$$

care este impar. Rezultă că $7^x - 1$ nu se poate scrie ca suma a două pătrate.
Soluţia 2: (*David-Andrei Anghel*)
Vom demonstra prin inducţie tare după n că $7^n - 1$ conţine în descompunerea sa un factori primi un factor prim de forma $4m + 3$ care apare la putere impară.
Pentru $n = 1$, $7 - 1 = 6 = 2 \cdot 3^1$.
Acum presupunem afirmaţia adevărată pentru $1, 2, \ldots, k$ şi o arătăm pentru $k + 1$.
Pentru $k+1$ impar, $k = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, deci $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 49^q - 1 = (M_8 + 7)(M_8 + 1) - 1 = M_8 + 6 = 2(M_4 + 3)$. Dar orice $M_4 + 3$ are un factor prim de forma $4m + 3$ care apare la o putere impară.
(*Radu-Alexandru Vasilescu* are alt argument: un pătrat perfect poate fi M_8, $M_8 + 1$ sau $M_8 + 4$, deci un număr de forma $M_8 + 6$ nu este sumă de două pătrate perfecte.)
Pentru $k + 1$ par, $k + 1 = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, avem $7^{k+1} - 1 = (7^q - 1)(7^q + 1)$. Dar $q \le k$, deci, potrivit ipotezei de inducţie, $7^q - 1$ are un factor prim de forma $4m + 3$ la o putere impară, iar $(7^q - 1, 7^q + 1) = 2$, deci respectivul factor prim de forma $4m + 3$ apare la putere impară şi în descompunerea lui $7^{k+1} - 1$.
Se ştie că un număr natural se scrie ca suma a două pătrate perfecte dacă şi numai dacă fiecare eventual divizor prim de forma $4k + 3$ apare la putere pară în descompunerea în factori primi a numărului.
Conchidem că $7^x - 1$ nu se scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Am primit soluţii de la: *Luca Pană, David-Andrei Anghel* şi *Radu-Alexandru Vasilescu.*

Problem of the week no. 183
Prove that there is no positive integer x such that $7^x - 1$ can be written as the sum of the squares of two positive integers.

Baltic Way, 2019

Solution 1: (user MarkBcc168 on AoPS)
Let $x = 2^m \cdot n$ where n is odd. Since $7^n - 1 \equiv 6 \pmod 8$, there exists a prime $p \equiv 3 \pmod 4$ such that $\nu_p(7^n - 1)$ is odd. By LTE,

$$\nu_p(7^x - 1) = \nu_p(7^n - 1) + \nu_p(2^m) = \nu_p(7^n - 1),$$

which is odd. This implies that $7^x - 1$ cannot be written as a sum of two squares, done.
Solution 2: (*David-Andrei Anghel*)
We prove by induction after n that the prime factorization of $7^n - 1$ contains a prime factor of the form $4m + 3$ lifted to an odd exponent.
For $n = 1$, $7 - 1 = 6 = 2 \cdot 3^1$.
We assume the statement to be true for $1, 2, \ldots, k$ and prove it for $k + 1$.
For $k+1$ odd, $k = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, hence $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 49^q - 1 = (M_8 + 7)(M_8 + 1) - 1 = M_8 + 6 = 2(M_4 + 3)$. But any number of the form $M_4 + 3$ has a prime factor of the same form which appears at an odd exponent.
For $k + 1$ even, $k + 1 = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, we have $7^{k+1} - 1 = (7^q - 1)(7^q + 1)$. But $q \leq k$, therefor, according to the inductive hypothesis, $7^q - 1$ does possess a prime factor of the form $4m + 3$ which is lifted to an odd exponent. Since $(7^q - 1, 7^q + 1) = 2$, the prime factor in question does also appear at an odd exponent in the prime factorization of $7^{k+1} - 1$ as well.
It is well-known that a number can be written as the sum of two perfect squares if and only if its prime factorization does not contain a prime of the form $4k+3$ lifted to an odd exponent. In conclusion, $7^x - 1$ is not a sum of two perfect squares.