Problema săptămânii 182
Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$. Demonstraţi că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots - \frac{1}{a_n} \geq n\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} - \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}\right).$$

(în legătură cu problema 1, clasa a VII-a, ONM 2019)

Titu Zvonaru

Soluţia 1: Vom nota afirmaţia din enunţ cu $P(n)$ şi o vom demonstra prin inducţie Cauchy, adică mai întâi prin inducţie pentru puteri ale lui 2, apoi pentru celelalte numere.
Pentru $n = 2$ inegalitatea de demonstrat, $a_1 + a_2 + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} \geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} - \dfrac{1}{\sqrt{a_1 a_2}}\right)$, se scrie echivalent $(a_1 a_2 - 1)\big(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\big)^2 \geq 0$.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru $n = 2^k$, o demonstrăm pentru $n = 2^{k+1}$.
Avem că $a_1 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}} - \dfrac{1}{a_1} - \ldots - \dfrac{1}{a_{2^k}} - \dfrac{1}{a_{2^k+1}} - \ldots - \dfrac{1}{a_{2^{k+1}}} \overset{P(2^k)}{\geq}$
$2^k\left(\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} - \dfrac{1}{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} - \dfrac{1}{\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}}\right) \overset{P(2)}{\geq}$
$2^{k+1}\left(\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} - \dfrac{1}{\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}}}\right)$.
Pentru a demonstra $P(n)$, cu $2^k < n < 2^{k+1}$, aplicăm inegalitatea, deja demonstrată, $P(2^{k+1})$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ şi $g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq 1$.
Definim $a_{n+1} = \ldots = a_{2^{k+1}} = g$ şi aplicăm $P(2^{k+1})$ pentru aceste 2^{k+1} numere.
Observăm că $\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} = \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_n \cdot g^{2^{k+1}-n}} = \sqrt[2^{k+1}]{g^n \cdot g^{2^{k+1}-n}} = g$.
Aşadar obţinem că $a_1 + \ldots + a_n + (2^{k+1} - n)g - \dfrac{1}{a_1} - \ldots - \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{2^{k+1} - n}{g} \geq 2^{k+1}\left(g - \dfrac{1}{g}\right)$, de unde rezultă imediat $P(n)$.
Alternativ, se putea demonstra că $P(2^k)$ implică $P(2^{k+1})$ şi apoi că $P(n+1)$ implică $P(n)$ (alegând $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$).

Soluţia 2: (*David-Andrei Anghel, Luca Pană*) - depăşeşte nivelul ,,juniori”
Fie $a_i = e^{b_i}$, cu $b_i \geq 0$ şi $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \dfrac{1}{e^x} = e^x - e^{-x}$. Este uşor de văzut că $f'(x) = e^x + e^{-x}$, $f''(x) = e^x - e^{-x} \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, deci f este funcţie convexă. Din inegalitatea lui Jensen rezultă că

$$f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_n) \geq n \cdot f\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right),$$

care este tocmai inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, adică pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

În afară de soluţia precedentă, am primit şi una de la *Carol Luca Gasan* (inducţie Cauchy, ca şi soluţia 1, cea a autorului).

Problem of the week no. 182

Let $n \geq 2$ be a positive integer and let $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$. Prove that

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots - \frac{1}{a_n} \geq n\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} - \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}\right).$$

Titu Zvonaru

Solution 1: We denote the statement by $P(n)$ and we prove it by a Cauchy-type induction, i.e. first we prove it by induction for powers of 2, then we use this for the other values of n.

For $n = 2$ our inequality, $a_1 + a_2 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} - \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}}\right)$, can be written equivalently $(a_1 a_2 - 1)\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$.

Assuming the statement to be true for $n = 2^k$, we prove it for $n = 2^{k+1}$.

We have $a_1 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}} - \frac{1}{a_1} - \ldots - \frac{1}{a_{2^k}} - \frac{1}{a_{2^k+1}} - \ldots - \frac{1}{a_{2^{k+1}}} \overset{P(2^k)}{\geq}$
$2^k\left(\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} - \frac{1}{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} - \frac{1}{\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}}\right) \overset{P(2)}{\geq}$
$2^{k+1}\left(\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} - \frac{1}{\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}}}\right)$.

In order to prove $P(n)$, cu $2^k < n < 2^{k+1}$, we apply the inequality, $P(2^{k+1})$, which is already proven. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ and $g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq 1$.

Define $a_{n+1} = \ldots = a_{2^{k+1}} = g$ and apply $P(2^{k+1})$ for these 2^{k+1} numbers.

Notice that $\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} = \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_n \cdot g^{2^{k+1}-n}} = \sqrt[2^{k+1}]{g^n \cdot g^{2^{k+1}-n}} = g$.

Thus we obtain $a_1 + \ldots + a_n + (2^{k+1} - n)g - \frac{1}{a_1} - \ldots - \frac{1}{a_n} - \frac{2^{k+1} - n}{g} \geq 2^{k+1}\left(g - \frac{1}{g}\right)$, from where we get $P(n)$.

Alternatively, we could have proven that $P(2^k) \Rightarrow P(2^{k+1})$ and $P(n+1) \Rightarrow P(n)$ (choosing $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$).

Solution 2: (*David-Andrei Anghel, Luca Pană*) - beyond "juniors" level

Let $a_i = e^{b_i}$, with $b_i \geq 0$ and $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x} = e^x - e^{-x}$. It is easy to see that $f'(x) = e^x + e^{-x}$, $f''(x) = e^x - e^{-x} \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, which shows that f is a convex function. From Jensen's inequality it follows that

$$f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_n) \geq n \cdot f\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right),$$

which is exactly the desired inequality. Equality holds when $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, i.e. for $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.