Problema săptămânii 181

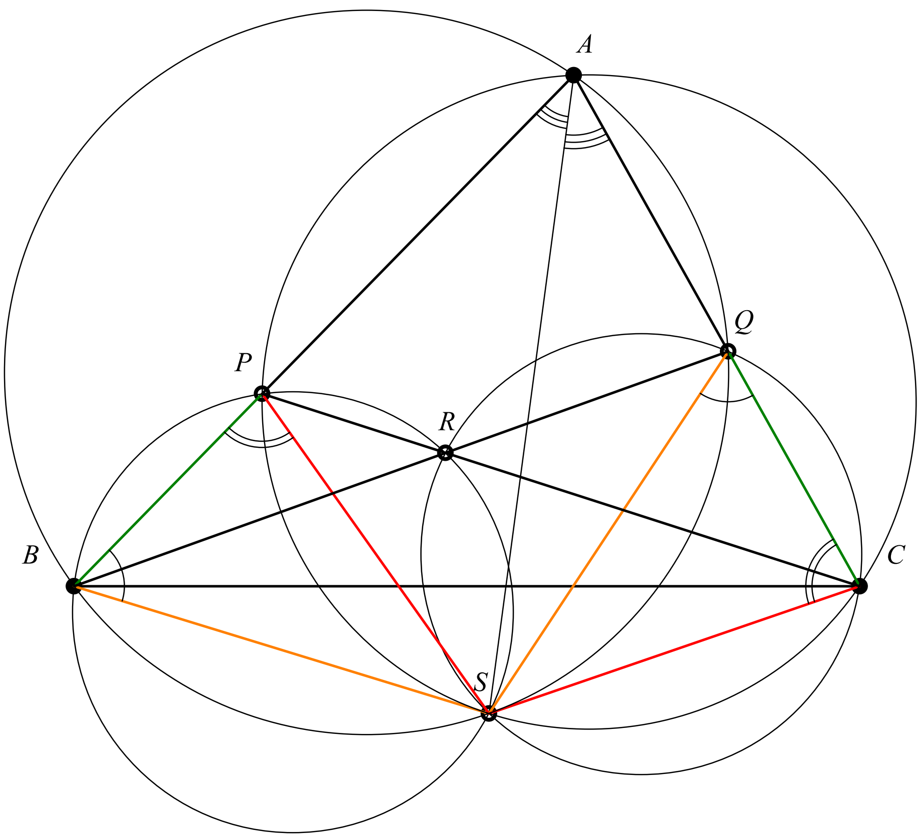
Fie ABC un triunghi şi două puncte $P \in [AB]$, $Q \in [AC]$ astfel încât să avem $[PB] \equiv [QC]$. Notăm apoi cu $\{R\} = [BQ] \cap [CP]$ şi cu S cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor BPR şi CQR. Arătaţi că semidreapta $[AS$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

Crux Mathematicorum

Îi mulţumesc domnului profesor *Mihai Miculiţa* pentru a-mi fi semnalat problema. Am ales-o pentru că, deşi uşurică, este destul de generoasă în idei. Soluţia domnului Miculiţa surprinde aspectele esenţiale. Alte soluţii am primit de la: *David-Andrei Anghel, Selim Cadîr, Luca Pană, Dacian Robu, Ioana Stănoiu, Gabriel Turbincă.*

Iată câteva idei, alternative celor din soluţia domnului Miculiţa pe care v-o prezentăm în redactarea domniei sale, separat.

Notând cu R_1 şi R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BPR şi CQR, avem din teorema sinusurilor $2R_1 \sin \widehat{BRP} = BP = CQ = 2R_2 \sin \widehat{CRQ}$, deci $R_1 = R_2$. Apoi $SC = 2R_2 \sin \widehat{SRC} = 2R_1 \sin \widehat{SRB} = SB$ şi, analog, $SQ = SB$, deci triunghiurile SCQ şi SPB sunt congruente, prin urmare şi înălţimile sunt corespunzătoare laturilor BP şi CQ sunt congruente, adică S este pe bisectoarea $\widehat{BAC}$.



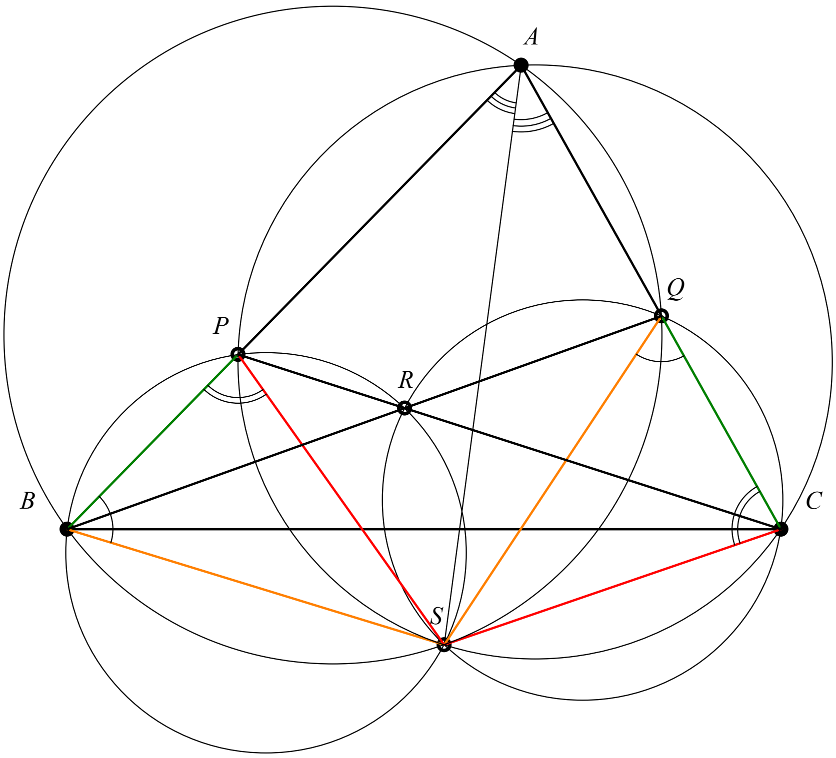
Desigur, inscriptibilitatea patrulaterelor $ABSQ$ şi $APSC$ rezultă uşor dintr-un calcul de unghiuri, invocarea punctului lui Micquel nefiind esenţială.

Remarcă: (*Luca Pană*)
Se ştie că S, al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor BPR şi CQR, este centrul ,,spiral similarity”[1] care duce B în Q şi P în C, cu alte cuvinte, se ştie că triunghiurile BSP şi QSC sunt asemenea. Atunci $BP = CQ$ arată că triunghiurile sunt de fapt congruente, de unde concluzia rezultă ca în celelalte soluţii prezentate mai sus.

Problem of the week no. 181
Let ABC be a triangle and consider $P \in [AB]$, $Q \in [AC]$ such that $[PB] \equiv [QC]$. If $\{R\} = [BQ] \cap [CP]$ and S is the second intersection point of the circumcircles of triangles BPR and CQR, prove that $[AS$ is the bisector of angle $\sphericalangle BAC$.

Crux Mathematicorum

Solution 1: (*Mihai Miculiţa*)
S is the Micquel Point of the complete quadrilateral $APRQBC$, therefore $ABSQ$ and $APSC$ are both cyclic. It follows that $\widehat{PBS} = \widehat{SQC}$ and $\widehat{BPS} = \widehat{SCQ}$. Then triangles BPS and QCS are equal (ASA), hence $BS = SQ$. As $APSC$ is cyclic, the angles opposing these two chords are equal, which means that S lies on the bisector of $\widehat{BAC}$.



[1] a se vedea materialul lui Yufei Zhao, Three Geometry Lemmas.

Solution 2:
Let R_1 and R_2 be the radii of the circumcircles of triangles BPR and CQR. By the Law of sines, $2R_1 \sin \widehat{BRP} = BP = CQ = 2R_2 \sin \widehat{CRQ}$, hence $R_1 = R_2$. Then, $SC = 2R_2 \sin \widehat{SRC} = 2R_1 \sin \widehat{SRB} = SB$ and, similarly, $SQ = SB$, therefore triangles SCQ and SPB are equal. Then the altitudes corresponding to the sides BP and CQ in these two triangles are also equal, which shows that point S is at equal distance from the sides of angle $\widehat{BAC}$, which means that it belongs to the bisector of $\widehat{BAC}$.