BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid"
Cipru, 18 ianuarie 2020 (barajul 1)

Problema 1. a) Dacă n este un număr natural nedivizibil cu 3, dovedeşte că $n^2 + 2$ este multiplu de 3.
b) Găsiţi toate numerele prime p astfel încât $p^2 + 8$ să fie şi el prim.

Problema 2. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle CBA) = 75^\circ$ şi fie M mijlocul laturii AB. Notăm cu E simetricul lui M faţă de BC. Paralela prin E la AB intersectează AC în punctul Z. Paralela prin A la BC intersectează paralela prin B la ME în punctul K. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle ZBK$.

Problema 3. Andreas şi Basil joacă un joc. Cei doi scriu alternativ pe tablă câte un pătrat perfect nenul, un pătrat perfect putând fi scris şi de mai multe ori. Dacă suma numerelor de pe tablă devine mai mare ca 24, cel care a scris ultimul număr pierde. Dacă Andreas începe jocul, află mai întâi care din cei doi jucători are strategie câştigătoare, apoi explică o asemenea strategie.

Problema 4. Într-o clasă fiecare elev cânta la cel puţin unul din următoarele instrumente muzicale: chitară, vioară şi pian. Ştim că:
• Cel puţin 90% dintre elevi cântă la chitară, la vioară sau la ambele.
• Cel puţin 90% dintre elevi cântă la vioară, la pian sau la ambele.
• Cel puţin 90% dintre elevi cântă la pian, la chitara sau la ambele.
Există, de asemenea, un număr k (nu neapărat un număr întreg), astfel încât:
• Cel puţin k% dintre elevii care cântă la chitară cântă doar la chitară.
• Cel puţin k% dintre elevii care cântă la vioară cântă doar la vioară.
• Cel puţin k% dintre elevii care cântă la pian cântă doar la pian.
Găsiţi valoarea maximă a lui k.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

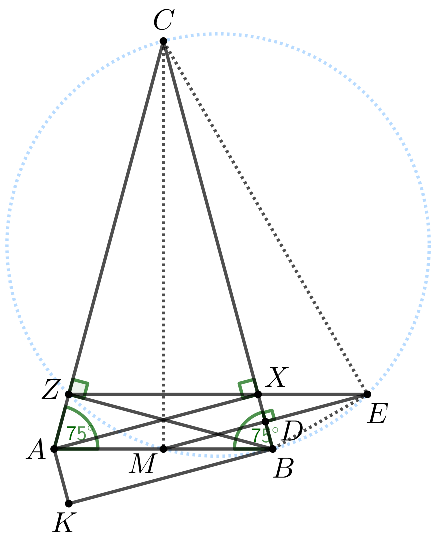
Problema 1. a) Dacă n este un număr natural nedivizibil cu 3, dovedeşte că n^2+2 este multiplu de 3.
b) Găsiţi toate numerele prime p astfel încât p^2+8 să fie şi el prim.

Soluţie: a) Dacă $n = 3k \pm 1$, atunci $n^2+2 = (3k\pm 1)^2+2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1) \vdots 3$.
b) Dacă $3 \nmid p$, atunci, conform a), $3 \mid p^2+2$, deci $3 \mid p^2+8$. Cum $p^2+8 > 3$, în acest caz p^2+8 nu este număr prim. Rămâne cazul $p=3$, caz în care $p^2+8=17$ este număr prim, deci $p=3$ este unica soluţie.

Problema 2. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle CBA) = 75°$ şi fie M mijlocul laturii AB. Notăm cu E simetricul lui M faţă de BC. Paralela prin E la AB intersectează AC în punctul Z. Paralela prin A la BC intersectează paralela prin B la ME în punctul K. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle ZBK$.

Soluţie: Fie $\{X\} = BC \cap ZE$ şi $\{D\} = BC \cap ME$. Se arată uşor că $MBEX$ este paralelogram. Atunci $[MD]$ este linie mijlocie în triunghiul ABX, deci $AX \perp BC$. Din simetrie rezultă uşor că şi $BZ \perp AC$, deci $m(\sphericalangle EBA) = 90° - m(\sphericalangle CAB) = 15°$. La fel, $m(\sphericalangle KBA) = m(\sphericalangle XAB) = 15°$, deci $m(\sphericalangle ZBK) = 30°$.

(Alte idei pentru a arăta că $BZ \perp AC$ ar putea consta în a demonstra că $BECZ$ este inscriptibil şi că $\Delta\, BCE \equiv \Delta\, BCM$, deci $m(\sphericalangle CZB) = 180° - m(\sphericalangle CEB) = 180° - m(\sphericalangle CMB) = 90°$.)



Problema 3. Andreas şi Basil joacă un joc. Cei doi scriu alternativ pe tablă câte un pătrat perfect nenul, un pătrat perfect putând fi scris şi de mai multe ori.

Dacă suma numerelor de pe tablă devine mai mare ca 24, cel care a scris ultimul număr pierde. Dacă Andreas începe jocul, află mai întâi care din cei doi jucători are strategie câştigătoare, apoi explică o asemenea strategie.

Soluţia 1: Andreas are strategie câştigătoare. El poate câştiga astfel: începe prin a scrie pe tablă numărul $4 = 2^2$. Este evident că că pe tablă pot fi scrise numai numerele 1, 4, 9 şi 16 (25 fiind deja prea mare, cine îl scrie, pierde).
• Dacă Basil răspunde cu 1, Andreas scrie 9. Suma este acum 14. Dacă Basil scrie 16, a pierdut; dacă scrie 9, Andreas scrie 1, face totalul 24 şi câştigă la următoarea mutare a lui Basil. Dacă Basil scrie 4, Andreas scrie 4. Totalul devine 22, aşa că Basil trebuie să scrie 1. Andreas scrie şi el 1, câştigând la următoarea mutare a lui Basil. În fine, dacă Basil scrie 1, Andreas scrie 4. Totalul este 19. Acum, dacă Basil scrie 1, Andreas scrie 4, iar dacă Basil scrie 4, Andreas scrie 1 şi câştigă.
• Dacă Basil răspunde cu 4, Andreas scrie 9. Totalul este 17. Dacă Basil scrie 1, Andreas scrie 4. Totalul este 22, cei doi mai pot scrie câte un 1, apoi Andreas câştigă. Dacă Basil scrie 4, de aici se pot scrie numai patru de 1 şi Andreas câştigă din nou.
• Dacă Basil răspunde cu 9, se mai pot pune numai doi de 1; Andreas câştigă.
• Dacă Basil răspunde cu 16, Andreas scrie 4 şi câştigă la următoarea mutare a lui Basil.

Soluţia 2: Andreas are strategie câştigătoare. El poate câştiga astfel: începe prin a scrie pe tablă numărul $9 = 3^2$. Este evident că că pe tablă pot fi scrise numai numerele 1, 4, 9 şi 16 (25 fiind deja prea mare, cine îl scrie, pierde).
• Dacă Basil răspunde cu 9 (dacă răspunde cu mai mult, pierde deja), Andreas scrie 4 şi face totalul 22. Se mai pot scrie doi de 1, dar apoi Andreas câştigă.
• Dacă Basil răspunde cu 4, Andreas scrie 9 şi ajungem la acelaşi final.
• Dacă Basil răspunde cu 1, Andreas scrie 9 şi face totalul 19. Dacă Basil scrie 1, Andreas scrie 4, şi invers. Se ajunge la suma 24 şi Andreas câştigă.

Problema 4. Într-o clasă fiecare elev cânta la cel puţin unul din următoarele instrumente muzicale: chitară, vioară şi pian. Ştim că:
• Cel puţin 90% dintre elevi cântă la chitară, la vioară sau la ambele.
• Cel puţin 90% dintre elevi cântă la vioară, la pian sau la ambele.
• Cel puţin 90% dintre elevi cântă la pian, la chitara sau la ambele.
Există, de asemenea, un număr k (nu neapărat un număr întreg), astfel încât:
• Cel puţin $k\%$ dintre elevii care cântă la chitară cântă doar la chitară.
• Cel puţin $k\%$ dintre elevii care cântă la vioară cântă doar la vioară.
• Cel puţin $k\%$ dintre elevii care cântă la pian cântă doar la pian.
Găsiţi valoarea maximă a lui k.

Soluţie: Cu notăţiile din figură şi notând şi $S = A + B + C + D + E + F + G$, numărul total al elevilor, ştim că $A, E, G \leq \dfrac{S}{10}$.

De asemenea, $A \geq \frac{k}{100}(S - E - F - G)$, $E \geq \frac{k}{100}(S - A - B - G)$, $H \geq \frac{k}{100}(S - A - D - E)$.

Adunând aceste trei inegalităţi şi înlocuind $B+D+F = S-(A+E+G)-C$, obţinem $A+E+G \geq \frac{k}{100}(2S-A-E-G)$, adică $(100+k)(A+E+G) \geq 2Sk+kC \geq 2Sk$.

Dar $A+E+G \leq \frac{3S}{10}$, deci $\frac{3}{10}(100+k) \geq 2k$, de unde rezultă $k \leq \frac{300}{17}$.

Această valoare este într-adevăr atinsă dacă $A = E = G = 3$, $C = 0$, $B = D = F = 7$.