Problema săptămânii 179
Fie p un număr prim şi x, y, z numere naturale nenule, diferite două câte două, mai mici decât p. Arătaţi că dacă numerele x^3, y^3 şi z^3 dau acelaşi rest la împărţirea cu p, atunci $x^2 + y^2 + z^2$ este divizibil cu $x + y + z$.

Olimpiadă Polonia, 2003

Soluţie:
Ştim că p divide $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ şi analoagele. Cum $-p < x-y < p$ şi $x-y \neq 0$, rezultă că p divide x^2+xy+y^2 şi, analog, p divide y^2+yz+z^2 şi z^2+zx+x^2. Atunci p divide şi diferenţa $(x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2) = (x - z)(x + y + z)$. Întrucât p nu divide $x - z$, deducem că p divide $x + y + z$. Dar $0 < x + y + z < 3p$, deci $x + y + z \in \{p, 2p\}$. Dacă $x + y + z$ este par, atunci şi $x^2 + y^2 + z^2$ este par. Cum $p > 2$, tot ce ne rămâne să demonstrăm este că p divide $x^2 + y^2 + z^2$. Dar p divide $a = (x+y+z)^2$ şi p divide $b = (x^2+xy+y^2)+(y^2+yz+z^2)+(z^2+zx+x^2)$, deci p divide şi $2b - a = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Dar $p > 3$, deci $p \mid x^2 + y^2 + z^2$.

Problem of the week no. 179
Let p be a prime number. Integers x, y, z satisfy $0 < x < y < z < p$. If x^3, y^3, z^3 have the same remainder upon dividing by p, then prove that $x^2 + y^2 + z^2$ is divisible by $x + y + z$.

Polish Mathematical Olympiad, 2003

A solution can be found in Mathematical Excalibur.