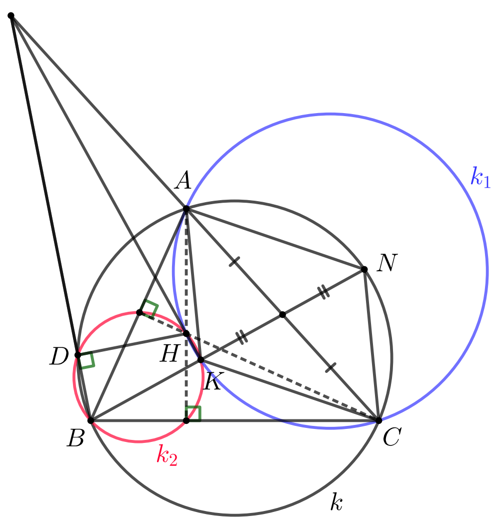
Problema săptămânii 177
Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB \neq BC$ şi N al doilea punct de intersecţie a dreptei suport a medianei din B cu cercul circumscris triunghiului ABC. Fie H ortocentrul triunghiului şi D acel punct al cercului circumscris pentru care $m(\sphericalangle BDH) = 90°$. Fie K simetricul lui N faţă de mijlocul lui $[AC]$. Arătaţi că dreptele AC, KH şi BD sunt concurente.

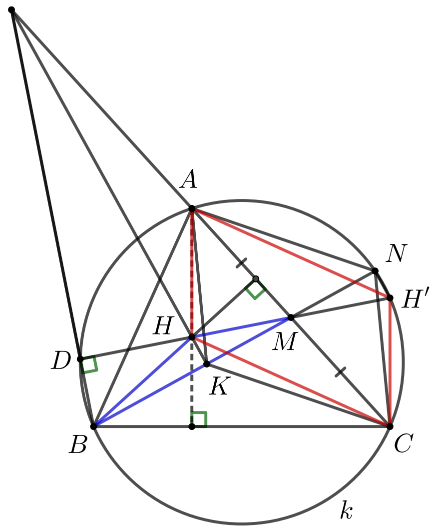
baraj EGMO, Ungaria

Vom prezenta cele două soluţii oficiale, traduse de pe pagina lui Nagy Zoltán. Fie M mijlocul lui (AC). Prima soluţie arată că dreptele AC, KH şi BD sunt axe radicale pentru trei cercuri, deci sunt concurente în centrul radical, iar cea de-a doua arată că dreptele AC, KH şi BD sunt înălţimile triunghiului BHM, prin urmare sunt concurente în ortocentrul acestuia.

Soluţia 1: Fie α, β, γ măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, respectiv $\sphericalangle C$ şi k cercul circumscris lui ABC. Cum $m(\sphericalangle AKC) = m(\sphericalangle ANC) = 180° - \beta = m(\sphericalangle AHC)$, punctele A, H, K, C sunt conciclice. Să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $AB < BC$. Atunci ordinea punctelor pe cercul circumscris lui AHC, notat k_1, este A, H, K, C.
Totodată, $m(\sphericalangle HKA) = m(\sphericalangle HCA) = 90° - \alpha$ şi $m(\sphericalangle AKN) = m(\sphericalangle CNK) = m(\sphericalangle CNB) = \alpha$, deci $m(\sphericalangle HKN) = m(\sphericalangle HKA) + m(\sphericalangle AKN) = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Rezultă că punctele B, K, H, D se află pe cercul de diametrul $[BH]$, notat k_2.
În fine: BD este axa radicală a cercurilor k şi k_2, KH este axa radicală a cercurilor k_1 şi k_2, iar AC este axa radicală a cercurilor k şi k_1. Prin urmare, cele trei drepte sunt fie paralele (în sens extins: adică paralele sau confundate), fie concurente. Însă KH este perpendiculară pe BN, iar AC nu este perpendiculară pe BN, deci HK şi AC nu sunt paralele; prin urmare cele trei axe radicale sunt concurente.
Dacian Robu şi *Selim Cadîr* arată că punctele B, D, H, K sunt conciclice considerând A' piciorul înălţimii din A şi arătând că $\sphericalangle A'HK \equiv \sphericalangle ACK \equiv \sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle NBA'$.



Soluţia 2: Fie H' simetricul lui H faţă de mijlocul, M, al laturii $[AC]$. Se ştie despre punctul H' că se află pe cercul circumscris k şi că, mai mult, este chiar punctul diametral opus lui B pe acest cerc. Rezultă că $NH' \perp BN$. De asemenea, $HKH'N$ este paralelogram, deci $HK \perp BN$.
Să mai observăm că $m(\sphericalangle BDH') = 90° = m(\sphericalangle BDH)$, deci punctele D, H, M, H' sunt coliniare. Aşadar, $BD \perp HM$, $CM \perp BH$, deci dreptele AC, KH şi BD sunt dreptele suport ale înălţimilor triunghiului BHM, prin urmare sunt concurente.



O problemă legată de aceeaşi configuraţie este şi problema săptămânii 67.
Să mai observăm că punctul K este punctul B-Humpty în triunghiul ABC. (vezi articolul On two special points in triangle).

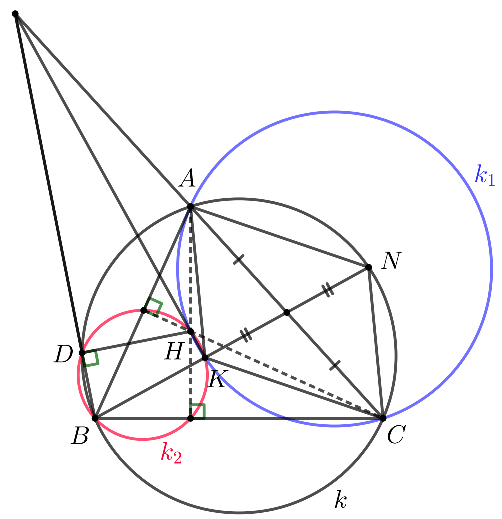
Problem of the week no. 177
Let ABC be an acute triangle in which $AB \neq BC$, let M be the midpoint of the side AC, and let N the point where the line BM meets again the circumcircle of ABC. Denote by H the orthocenter of ABC and consider the point D on the circumcircle for which $\sphericalangle BDH = 90°$. If K is the reflection of N across M, prove that lines AC, KH, and BD are concurrent.

EGMO selection test, Hungary

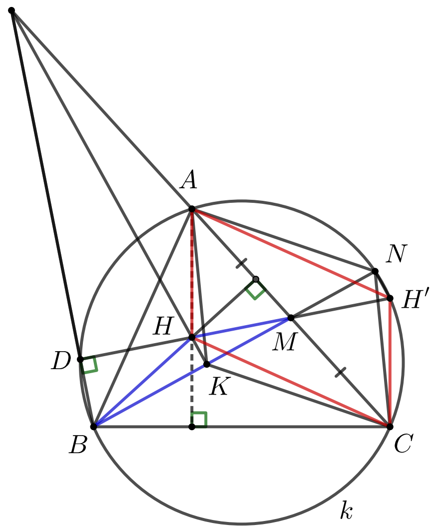
We present the two official solutions, translated from Nagy Zoltán's web-page. Denote by M the midpoint of (AC). The first solution is based on noticing that lines AC, KH and BD are radical axes of three circles, hence they meet at the radical center (power center) of the three circles. The second solution is based on proving that AC, KH and BD are altitudes of triangle BHM, therefore they meet in the orthocenter of this triangle.

Solution 1: Let α, β, γ be the measures of angles $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, and $\sphericalangle C$ respectively, and let k denote the circumcircle of triangle ABC. As $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ANC =$

$180° - \beta = \sphericalangle AHC$, points A, H, K, C are con-cyclic. Assume, without loss of generality, that $AB < BC$. The order of the points on the circumcircle k_1, of AHC, is A, H, K, C.
Moreover, $\sphericalangle HKA = \sphericalangle HCA = 90° - \alpha$ and $\sphericalangle AKN = \sphericalangle CNK = \sphericalangle CNB = \alpha$, hence $\sphericalangle HKN = \sphericalangle HKA + \sphericalangle AKN = 90° - \alpha + \alpha = 90°$.
It follows that B, K, H, D belong to the circle of diameter $[BH]$, k_2.
Finally, BD is the radical axis of circles k and k_2, KH is the radical axis of circles k_1 and k_2, while AC is the radical axis of circles k and k_1 is perpendicular to BN, while AC is not, hence HK and AC are not parallel; thus, the three radical axes are concurrent.
Dacian Robu and *Selim Cadîr* show that points B, D, H, K are con-cyclic considering A' the foot of the altitude from A and proving that $\sphericalangle A'HK = \sphericalangle ACK = \sphericalangle CAN = \sphericalangle NBC = \sphericalangle NBA'$.



Solution 2: Let H' be the reflection of H across the midpoint, M, of the side $[AC]$. It is known that point H' is on the circumcircle of triangle ABC, in fact it is diametrically opposite to the vertex B. It follows that $NH' \perp BN$. Also, $HKH'N$ is a parallelogram, therefore $HK \perp BN$.
Let us also notice that $\sphericalangle BDH' = 90° = \sphericalangle BDH$, which means that points D, H, M, H' are collinear. Thus, $BD \perp HM$, $CM \perp BH$, i.e. lines AC, KH and BD are the altitudes of triangle BHM, therefore they are concurrent.



A similar configuration occurs in problem of week no. 67.
Let us also note that K is the B-Humpty point in triangle ABC as defined in the article On two special points in triangle.