Problema săptămânii 180
Colorăm fiecare pătrăţel unitate al unui pătrat 8×8 cu verde sau cu albastru astfel încât în orice pătrat 3×3 să fie a pătrăţele verzi şi în orice dreptunghi 2×4 să fie b pătrăţele verzi. Determinaţi toate valorile posibile ale perechii (a,b).

Lê Anh Vinh, preselecţie Arabia Saudită, 2014

Soluţia 1: Pavând mai întâi pătratul cu 8 dreptunghiuri 2×4, de exemplu ca în figura 1, deducem că în pătrat se află în total $8b$ pătrăţele verzi. Pavând apoi pătratul cu patru dale 3×3, trei dale 2×4 şi o dală 2×2 ca în figura 2, deducem că în pătratul 2×2 din colţul din stânga sus trebuie să se afle $8b-(4a+3b) = 5b-4a$ pătrate verzi. Rotind succesiv figura cu câte $90°$, deducem că în fiecare din cele patru pătrate $2\times$ situate în colţurile pătratului mare trebuie să se afle câte $5b-4a$ pătrate verzi. În fine, pavând pătratul mare cu patru pătrate 2×2 dispuse colţurile pătratului şi încă şase dreptunghiuri 2×4, ca în figura 3, deducem că $8b = 4(5b-4a)+6b$, adică $9b = 8a$. Deducem că $9 \mid a$, deci, cum $a\le 9$, $a\in\{0,9\}$. Obţinem că $(a,b)\in\{(0,0),\,(9,8)\}$. Evident, ambele aceste perechi convin; ele presupun colorarea completă a pătratului fie cu verde, fie cu albastru.

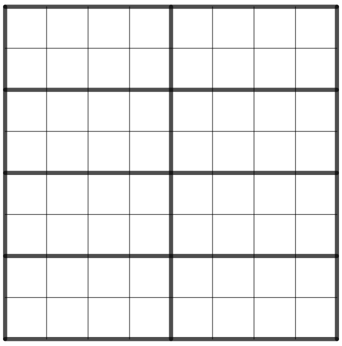

figura 1

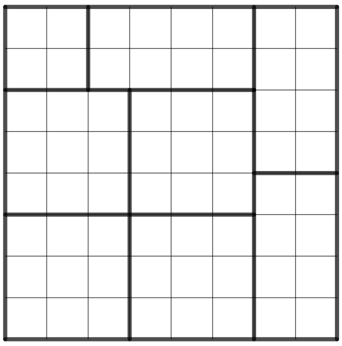

figura 2

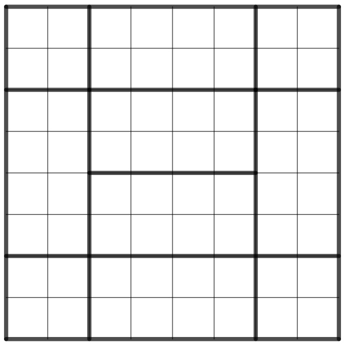

figura 3

Soluţia 2: (*Carol Luca Gasan*)
Considerăm un dreptunghi oarecare D de dimensiuni 4×6 de pe tablă şi marcăm în fiecare căsuţă a sa câte pătrate 3×3 complet conţinute în dreptunghiul D conţin respectiva căsuţă. Plasând cele 8 pătrate 3×3 care, suprapuse, încap în dreptunghiul D, obţinem următoarea completare:

1	2	3	3	2	1
2	4	6	6	4	2
2	4	6	6	4	2
1	2	3	3	2	1

Notând cu a_{ij}, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,6}$, numărul de pătrăţele verzi din căsuţa aflată pe linia i, coloana j, avem $a_{ij} \in \{0, 1\}$ şi putem vedea că numărul total al pătrăţelelor verzi conţinute în cele 8 pătrate 3×3 este $8a = a_{11} + a_{16} + a_{41} + a_{46} + 2(a_{12} + a_{15} + a_{21} + a_{26} + a_{31} + a_{36} + a_{42} + a_{45}) + 3(a_{13} + a_{14} + a_{43} + a_{44}) + 4(a_{22} + a_{25} + a_{32} + a_{35}) + 6(a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34})$.
Considerăm acum acelaşi dreptunghi D şi completăm fiecare căsuţă a sa cu numărul de dreptunghiuri având două linii şi patru coloane care încap complet în D şi conţin respectiva căsuţă. Nu luăm în considerare dreptunghiurile cu 4 linii şi două coloane. Plasând cele 9 dreptunghiuri 2×4 care încap complet în D obţinem aceeaşi completare ca şi în cazul pătratelor 3×3. Deducem că $9b = a_{11} + a_{16} + a_{41} + a_{46} + 2(a_{12} + a_{15} + a_{21} + a_{26} + a_{31} + a_{36} + a_{42} + a_{45}) + 3(a_{13} + a_{14} + a_{43} + a_{44}) + 4(a_{22} + a_{25} + a_{32} + a_{35}) + 6(a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34})$, adică $9b = 8a$. De aici se obţin, ca mai sus, soluţiile $(0, 0)$ şi $(9, 8)$.

Remarcă: Rezolvarea de mai sus arată că pentru orice dreptunghi care conţine un dreptunghi 4×6, există numai două perechi care satisfac enunţul.

Problem of the week no. 180
We color each unit square of a 8×8 table into green or blue such that there are a green unit squares in each 3×3 square and b green unit squares in each 2×4 rectangle. Find all possible values of (a, b).

Lê Anh Vinh

Solution 1: First, let us notice that covering the table with eight 2×4 rectangles, as in figure 1 for example, shows that the table contains in total $8b$ green unit squares. Next, by covering the table with four 3×3 squares, three 2×4 rectangles and one 2×2 square, as in figure 2, we see that the 2×2 square the upper left corner must contain $8b - (4a + 3b) = 5b - 4a$ green squares. By successively rotating the figure by $90°$, we deduce that in each of the four $2\times$ squares situated in the corners of the table there need to be $5b - 4a$ green unit squares. Finally, by covering the table with four 2×2 squares places into the four corners and with six 2×4 rectangles, as in figure 3, we find that $8b = 4(5b - 4a) + 6b$, i.e. $9b = 8a$. It follows that $9 \mid a$, and, as $a \leq 9$, we obtain that $a \in \{0, 9\}$. In conclusion, $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 8)\}$. Obviously, both pairs satisfy the requirements; for one of them the table is completely blue, while for the other it is completely green.

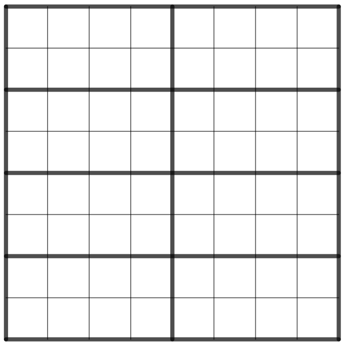

figure 1

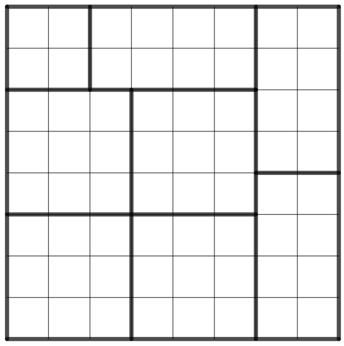

figure 2

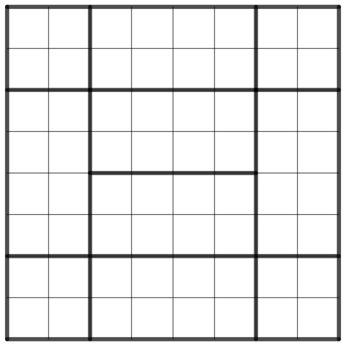

figure 3

Solution 2: (*Carol Luca Gasan*)
Consider an arbitrary rectangle D of size 4×6 from the table, and we fill each of its cells with the number of 3×3 completely contained in rectangle D that contain that cell. Placing the eight 3×3 that fit into D (overlapping allowed), we obtain the following filling:

1	**2**	**3**	**3**	**2**	**1**
2	**4**	**6**	**6**	**4**	**2**
2	**4**	**6**	**6**	**4**	**2**
1	**2**	**3**	**3**	**2**	**1**

Denoting by a_{ij}, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,6}$, the number of green squares situated in row no. i, column no. j, we have $a_{ij} \in \{0,1\}$ and we can see that the total number of green cells within these eight 3×3 squares is $8a = a_{11} + a_{16} + a_{41} + a_{46} + 2(a_{12} + a_{15} + a_{21} + a_{26} + a_{31} + a_{36} + a_{42} + a_{45}) + 3(a_{13} + a_{14} + a_{43} + a_{44}) + 4(a_{22} + a_{25} + a_{32} + a_{35}) + 6(a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34})$.
We consider again rectangle D and we fill each of its cells with the number of rectangles, having two lines and four columns situated completely within D, which contain that cell. We do not take into consideration the rectangles having 4 lines and two columns. Placing these 9 (overlapping) 2×4 rectangles that completely fit into D, we obtain the same filling of the table as we did for the 3×3 squares. We deduce that $9b = a_{11} + a_{16} + a_{41} + a_{46} + 2(a_{12} + a_{15} + a_{21} + a_{26} + a_{31} + a_{36} + a_{42} + a_{45}) + 3(a_{13} + a_{14} + a_{43} + a_{44}) + 4(a_{22} + a_{25} + a_{32} + a_{35}) + 6(a_{23} + a_{24} + a_{33} + a_{34})$, i.e. $9b = 8a$. As above, from here, one obtains the only solutions, $(0,0)$ and $(9,8)$.

Remark: The solution above proves that for any table that contains a 4×6 rectangle there are only two pairs that satisfy the requirements.