Problema săptămânii 177:

Fie ABC – un triunghi ascuţitunghic în care $[AB]\not\equiv[BC]$ şi N – este al doilea punct de intersecţie al dreptei suport al medianei duse din vârful B, cu cercul circumscris triunghiului ABC; iar K – simemricul este simetricul lui N – faţă de mijlocul laturii $[AC]$ (piciorul medianei duse din vârful B). Fie H – ortocentrul triunghilui şi D – acel punct al cercului circumscris, pentru care $\boxed{m\left(\widehat{BDH}\right)=90^0}$. Arătaţi că dreptele AC, KH şi BD – sunt concurente!

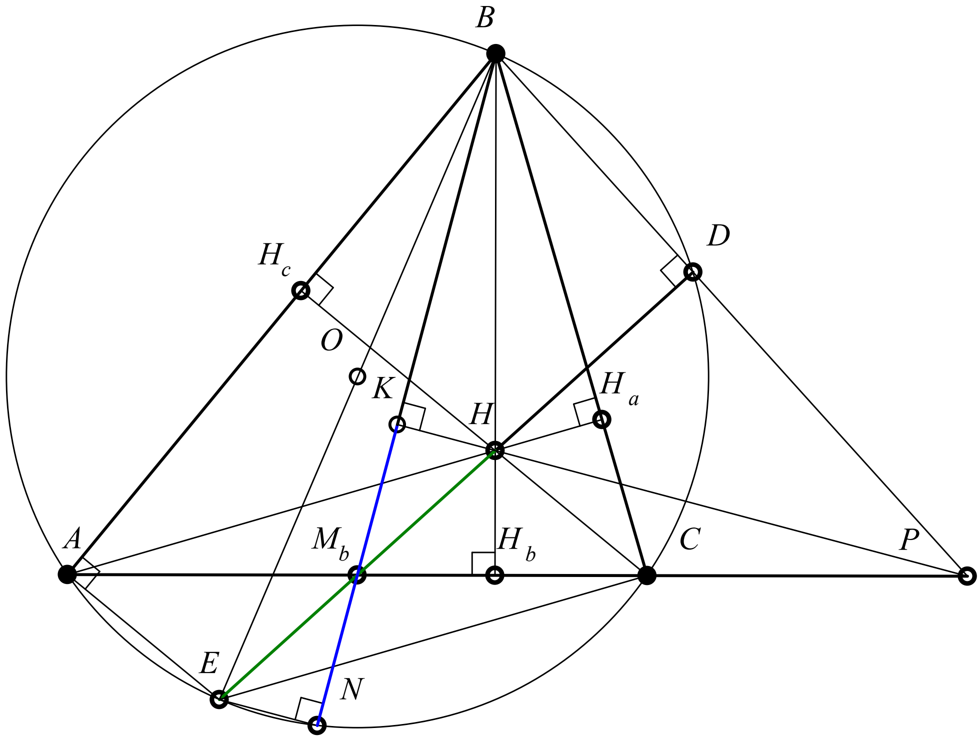

Fig.1.

SOLUŢIE-prin redefinirea punctului D (*Mihai Miculiţa*): Notând cu H_a, H_b, H_c – picioarele înălţimilor ΔABC (v.Fig.1) şi cu M_a – mijlocul laturii $[AC]$; iar cu $\{D;E\}=HM_a\cap\odot ABC$, unde: $M_a\in[EH]$, folosind următoarea:

LEMĂ: ***Simetricul ortocentrului unui triunghi fată de mijlocul unei laturi, este punctul diametral opus al vârfului opus acestei laturi***; obţinem că:

$$\left.\begin{array}{r} S_{M_b}(H)=E=S_O(B);\,(1)\Rightarrow[BE]-diametru\ \hat{i}n\odot ABC \\ D,N\in\odot ABC \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} DE\perp DB\Leftrightarrow\boxed{m\left(\widehat{BDH}\right)=90^0};\quad (2) \\ \qquad NE\perp NB.\quad (3) \end{array}\right.$$

Relaţia (2), ne arată că punctul nostru D – coincide cu punctul pu rtând acelaşi nume din ipoteza problemei!

Pe de altă parte, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} E=S_{M_b}(H)\ (1) \\ K=S_{M_b}(N) \end{array}\right\}\Rightarrow EN\parallel HK \\ NE\perp NB;\,(3) \end{array}\right\}\Rightarrow HK\perp BN.\quad (4)$$

În fine, relaţiile $BH_b\perp M_bP\left(=\underline{AC}\right), M_bD\perp\underline{BD}$ şi $\underline{HK}\perp BM_b\left(=BN\right)$ (4), ne arată că dreptele AC, BD şi HK – sunt înălţimile triunghiului $BM_bH\Rightarrow$ ele sunt concurente în ortocentrul ΔBM_bH, notat în figura noastră cu P. ■

OBSERVAŢIE: Folosindu-ne de cele stabilite, avem (v.Fig.2):

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}[M_bA]\equiv[M_bC]\\ [M_bH]\equiv[M_bE]\\ [M_bK]\equiv[M_bN]\\ [AC]\cap[HE]\cap[KN]=\{M_b\}\end{array}\right\}\Rightarrow ACHK=S_{M_a}\left(CAEN\right)\Rightarrow ACHK\equiv CAEN\\ \\ CAEN-inscriptibil\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ACHK-inscriptibil. \quad (5)$$

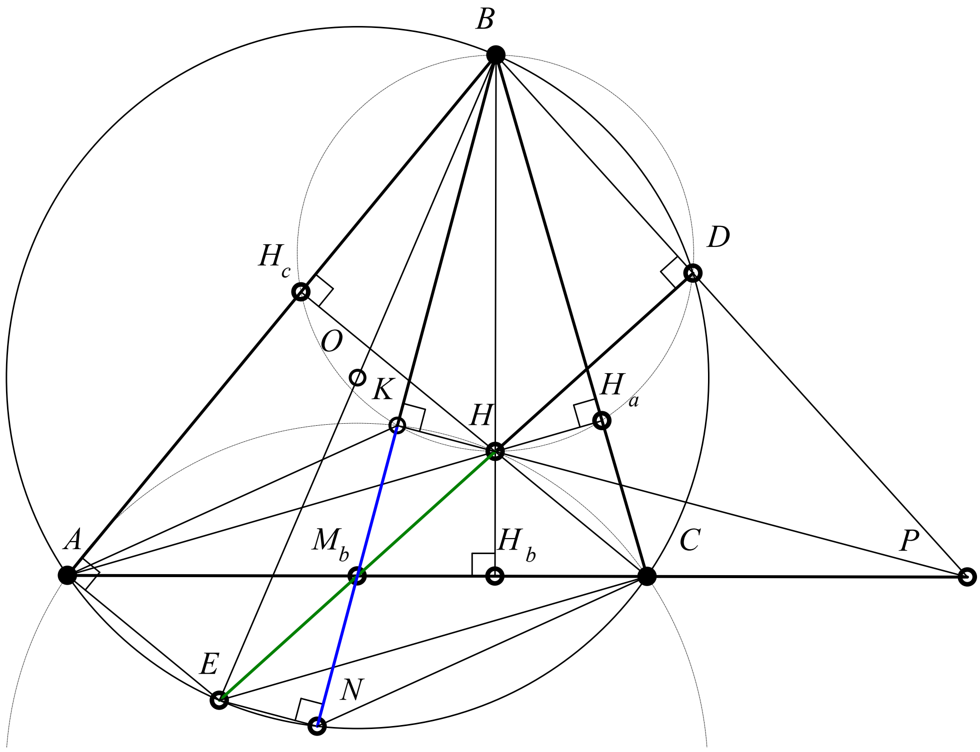

Fig.2.

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{r}HK\perp BK\ (4)\\ BD\perp HD\end{array}\right\}\Rightarrow BKHD-inscriptibil. \quad (6)$$

În fine, observând acum, că:

$\odot ACHK\cap\odot ABC=\{A;C\}$, $\odot BKHD\cap\odot ABC=\{B;D\}$ şi $\odot ACHK\cap\odot BKHD=\{H;K\}$, rezultă că dreptele AC, BD şi HK – fiind axele radicale ale celor 3, ele sunt concurente în centrul radical P – al cercurilor: $\odot ABC$, $\odot ACHK$ şi $\odot BKHD$.