Problema 1. Fie $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = n$ cei 16 divizori ai numărului natural n. Ştiind că $d_6 = 18$ şi $d_9 - d_8 = 17$, aflaţi n.

Olimpiadă Irlanda, 1998

Soluţie:
Evident $18 \mid n$, deci toţi divizorii lui 18 sunt divizori şi ai lui n. Cum 18 are 6 divizori, primii 6 divizori ai lui n sunt tocmai divizorii lui 18: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 9$, $d_6 = 18$.
Pentru a avea 16 divizori, n poate avea numai formele: $2 \cdot 3^7$ sau $2 \cdot 3^3 \cdot p$, unde $p > 3$ este un număr prim.
Este uşor de văzut că în primul caz, $n = 2 \cdot 3^7$, nu este verificată condiţia $d_9 - d_8 = 17$. Rămâne că $n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$. Cum p nu apare printre primii 6 divizori ai lui n, deducem că $p > 18$. Următorii divizori ai lui n, după 18, nu neapărat în ordine crescătoare, sunt 27, 54, p şi $2p$. Dacă $d_7 = p$, atunci $18 < p < 27$, deci $d_8 = 27$ şi $d_9 = 2p < 54$. Dar atunci $d_9 - d_8 = 17$ implică $2p - 27 = 17$, adică $p = 22$, care nu este număr prim, deci nu convine.
Rezultă că $p > 27$. Atunci $d_7 = 27$. Dacă $p < 54$, atunci $d_8 = p$, $d_9 = 54$ şi $d_9 - d_8 = 17$ revine la $54 - p = 17$. Obţinem $p = 37$, deci $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 1998$.
Dacă $p > 54$, atunci $d_8 = 54$, $d_9 = p$ şi $d_9 - d_8 = 17$ conduce la $p = 71$, deci la $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71 = 3834$.
Aşadar numerele cu proprietatea din enunţ sunt 1998 şi 3834.

Problema 2. Ce valori naturale poate lua expresia

$$\{x\} + \{2x\} + \{3x\}$$

atunci când x parcurge mulţimea numerelor reale?
(S-a notat cu $\{y\}$ partea fracţionară a numărului real y.)

Soluţia 1:
Dacă $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = x - [x] + 2x - [2x] + 3x - [3x] \in \mathbb{N}$, atunci $6x \in \mathbb{Z}$, adică există $n \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x = \dfrac{n}{6}$. În funcţie de restul împărţirii la 6 al lui n distingem şase cazuri:
• $n = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = \{k\} + \{2k\} + \{3k\} = 0$.
• $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = \left\{k + \dfrac{1}{6}\right\} + \left\{2k + \dfrac{2}{6}\right\} + \left\{3k + \dfrac{3}{6}\right\} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{6} = 1$.
• $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = \left\{k + \dfrac{2}{6}\right\} + \left\{2k + \dfrac{4}{6}\right\} + \{3k + 1\} = 1$.
• $n = 6k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = \left\{k + \dfrac{3}{6}\right\} + \{2k + 1\} +$

$\left\{3k+\frac{3}{2}\right\}=1.$

• $n=6k+4$, $k\in\mathbb{Z}$. În acest caz $\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=\left\{k+\frac{4}{6}\right\}+\left\{2k+\frac{4}{3}\right\}+\{3k+2\}=1.$

• $n=6k+5$, $k\in\mathbb{Z}$. În acest caz $\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=\left\{k+\frac{5}{6}\right\}+\left\{2k+\frac{5}{3}\right\}+\left\{3k+\frac{5}{2}\right\}=2.$

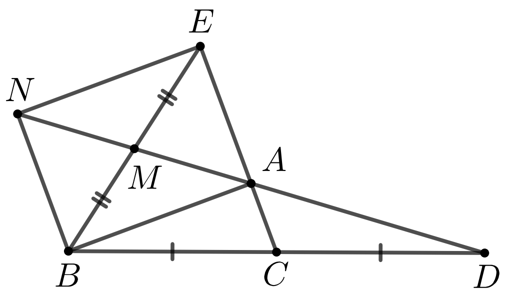
În concluzie, valorile naturale pe care le ia expresia din enunţ sunt 0, 1 şi 2.

Soluţia 2:
Deoarece $\{y\}<1$ pentru orice y real, deducem că $0\leq\{x\}+\{2x\}+\{3x\}<3$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, deci mulţimea valorilor posibile ale expresiei este inclusă în mulţimea $\{0,1,2\}$.
Deoarece, de exemplu, pentru $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ şi $x=\frac{5}{6}$ obţinem valorile 0, 1, respectiv 2, deducem că mulţimea valorilor posibile este întreaga mulţime $\{0,1,2\}$.

Problema 3. Latura $[BC]$ a triunghiului ABC este prelungită dincolo de C până în D, astfel ca $CD=BC$. Latura $[CA]$ este prelungită dincolo de A până în E, astfel ca $AE=2CA$.
Demonstraţi că, dacă $AD=BE$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

David Monk, EGMO 2013

Soluţie: În triunghiul EBD, $[EC]$ este mediană, iar punctul A împarte mediana în raport $2:1$, deci este centrul de greutate al triunghiului EBD. Fie M mijlocul segmentului $[BE]$ şi N simetricul lui A faţă de M. Atunci $ENBA$ este paralelogram şi $AN=2AM=AD=BE$, adică paralelogramul $ENBA$ are diagonalele congruente. Rezultă că acesta este dreptunghi, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A.



Puteţi consulta numeroase alte soluţii ale acestei probleme aici.

Problema 4. Pe o tablă de şah 8×8 sunt aşezaţi nişte pioni astfel încât pe fiecare linie şi pe fiecare coloană să fie un număr impar de pioni (nu neapărat acelaşi). Arătaţi că numărul total al pionilor aflaţi pe pătrăţelele negre este par.

Concursul KöMaL, 2017

Soluţie:
Aşezăm tabla de şah astfel încât pătrăţelul din colţul din stânga jos să fie negru. Numerotăm liniile tablei de jos în sus cu $1, 2, \ldots, 8$ şi coloanele tablei, de la stânga la dreapta cu $1, 2, \ldots, 8$.
Pătrăţelele negre sunt cele situate la intersecţiile dintre liniile cu număr impar cu coloanele cu număr impar şi cele aflate la intersecţiile dintre liniile cu număr par şi coloanele cu număr par.
Ne uităm la numărul de pioni aflaţi pe liniile 2, 4, 6, 8 şi la numărul de pioni situaţi pe coloanele 1, 3, 5, 7. Fiecare din aceste 8 numere este impar, deci suma lor este un număr par. La acest total contribuie pionii din pătrăţelele albe situate în liniile 2, 4, 6, 8 care au fost număraţi de câte două ori (şi pe linie, şi pe coloană), pionii din pătrăţelele negre situate pe liniile pare şi pionii din pătrăţelele negre situate pe coloanele impare. Deducem că, împreună, pe pătrăţelele negre situate pe liniile pare şi pe coloanele impare avem un număr par de pioni. Dar acest total cuprinde pionii aflaţi pe toate pătrăţelele negre număraţi câte o singură dată: aşa cum am văzut, pătrăţelele negre sunt pe linii şi coloane pare sau pe linii şi coloane impare. Prima categorie a fost considerată atunci când ne-am uitat la pionii aflaţi pe liniile pare, cea de-a doua categorie a fost considerată atunci când ne-am uitat la pionii aflaţi pe coloanele impare.
În concluzie, pe pătrăţelele negre trebuie să avem un număr par de pioni.