Problema 1. Fie a şi b două numere naturale fixate. Demonstraţi că dacă $a \cdot b$ este număr par, atunci există numere naturale c şi d astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, iar dacă $a \cdot b$ este număr impar, atunci nu există asemenea numere c şi d.

M. Gerver (revista *Kvant*)

Soluţie:
• Dacă $a \cdot b$ este par, distingem două situaţii: a şi b au parităţi diferite sau a şi b sunt ambele pare.

1. Dacă a şi b au parităţi diferite, atunci $a^2 + b^2$ este impar. Fie $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 2N + 1$. Putem, de exemplu, să alegem $c = N$ şi $d = N + 1$. (Vom avea $d^2 - c^2 = (N + 1)^2 - N^2 = 2N + 1 = a^2 + b^2$.)
2. Dacă a şi b sunt ambele pare, pătratele lor vor fi multipli de 4, deci va exista $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 4N$. Alegem atunci $c = N - 1$ şi $d = N + 1$. Avem $d^2 - c^2 = (N + 1)^2 - (N - 1)^2 = 4N = a^2 + b^2$.

• Dacă $a \cdot b$ este impar, adică a şi b sunt impare, atunci $a^2 + b^2$ este par, dar nedivizibil cu 4. (Dacă $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$, $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $a^2 + b^2 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2 = M_4 + 2$.) Pe de altă parte, $d^2 - c^2 = (d - c)(d + c)$, fiind produsul a două numere de aceeaşi paritate, este fie impar, fie divizibil cu 4, deci nu poate fi egal cu $a^2 + b^2$.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere reale pozitive. Demonstraţi că

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}}.$$

Când are loc egalitatea?

Soluţie:
Inegalitatea se scrie

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+c+b+d},$$

adică, după eliminarea numitorilor,

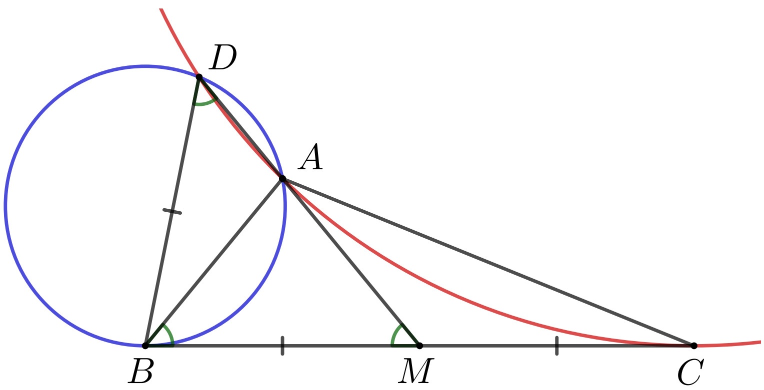
$$(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) \leq (ac + ad + bc + bd)(ab + ad + cb + cd).$$

După desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea, inegalitatea precedentă revine la $2abcd \leq a^2c^2 + b^2d^2$, deci la $(ac - bd)^2 \geq 0$.
Egalitatea are loc atunci când $ac = bd$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi. Două cercuri care trec prin A sunt tangente dreptei BC în punctele B, respectiv C. Fie D al doilea punct de intersecţie a celor două cercuri. Dacă A este mai aproape de BC decât D, iar $BC = 2BD$, demonstraţi că $m(\sphericalangle DAB) = 2 \cdot m(\sphericalangle ADB)$.

V. Yassinsky (Concursul Sharygin, 2015)

Soluţie:
Vom folosi o proprietate importantă (vezi prima dintre problemele propuse în cadrul materialului teoretic): dacă două cercuri se intersectează în punctele A şi D, iar BC este una din tangentele comune la cele două cercuri (B şi C fiind punctele de tangenţă), atunci dreapta AD (*axa radicală* a celor două cercuri) trece prin mijlocul lui $[BC]$. Într-adevăr, dacă $\{M\} = AD \cap BC$, scriind puterea punctului M faţă de cele două cercuri, avem $MB^2 = MA \cdot MD = MC^2$.
Folosind acest rezultat, cu notaţia de mai sus, avem $BM = BD$ şi $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DMB$. Dar $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ADB$ (ambele subîntind arcul AB al cercului tangent în B la BC). Din teorema unghiului exterior rezultă atunci că $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle ABM) + m(\sphericalangle AMB) = 2 \cdot m(\sphericalangle ADB)$.

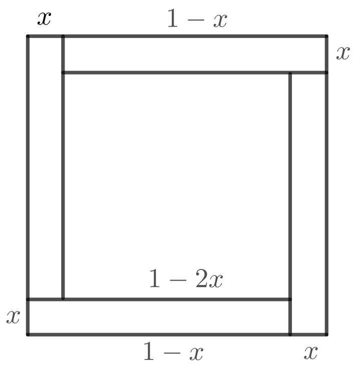


Problema 4. Un pătrat de latură 1 trebuie împărţit în dreptunghiuri având laturile paralele cu cele ale pătratului. Dreptunghiurile trebuie să aibă acelaşi perimetru, dar nu neapărat şi aceeaşi arie.
a) Poate fi împărţit pătratul în 20 de dreptunghiuri, fiecare dintre acestea având perimetrul 2,5?
b) Poate fi împărţit pătratul în 30 de dreptunghiuri, fiecare dintre acestea având perimetrul 2?

Soluţie:

a) Vom demonstra că o asemenea împărţire nu este posibilă. Presupunem că ar fi. Fie L şi ℓ lungimea, respectiv laţimea unuia din cele 20 de dreptunghiuri. Atunci $L, \ell \leq 1$, deci $(1-L)(1-\ell) \geq 0$, adică $1 - L - \ell + L \cdot \ell \geq 0$. Deducem că $L \cdot \ell \geq L + \ell - 1$. Dar perimetrul unui asemenea dreptunghi este $2(L+\ell) = 2,5$, deci $L + \ell = 1,25$. Aşadar, trebuie ca $L \cdot \ell \geq 1,25 - 1 = 0,25$. Cu alte cuvinte, un asemenea dreptunghi trebuie să aibă aria cel puţin $0,25$, deci, împreună, cele 20 de dreptunghiuri ar trebui să aibă aria cel puţin 5, ceea ce nu se poate deoarece aria întregului pătrat este numai 1.

b) Vom demonstra că o asemenea împărţire este posibilă.
Vom construi un exemplu de o asemenea împărţire. Vom construi mai întâi o „ramă" (vezi figura) formată din patru dreptunghiuri de lăţime x şi lungime $1-x$, unde x va fi ales în mod convenabil mai târziu.



Se vede că aceste dreptunghiuri au într-adevăr perimetrul 2. Îl vom alege pe $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ în aşa fel încât pătratul de latură $1-2x$ să poată fi împărţit în 26 de dreptunghiuri de perimetru 2. Împărţim pătratul din mijloc în 26 de benzi dreptunghiulare având lungimea $1-2x$ şi lăţimea $\dfrac{1-2x}{26}$. Perimetrul unui asemenea dreptunghi va fi atunci $2\left(1-2x+\dfrac{1-2x}{26}\right) = \dfrac{27(1-2x)}{13}$. Acest perimetru trebuind să fie 2, alegem x astfel încât $\dfrac{27(1-2x)}{13} = 2$. Rezolvând ecuaţia, obţinem $x = \frac{1}{54} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Am obţinut aşadar o împărţire care respectă cerinţele din enunţ.