Problema 1. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că m^2+n^2+m este divizibil cu mn. Demonstraţi că m este pătrat perfect.

Soluţie:

Fie $d=(m,n)$ şi $b,c\in\mathbb{N}$ astfel încât $m=db$, $n=dc$ şi $(b,c)=1$.
Condiţia din enunţ revine la $d^2bc\mid(d^2b^2+d^2c^2+db)$. Ea implică $dbc\mid(db^2+dc^2+b)$, de unde $d\mid(db^2+dc^2+b)$, deci $d\mid b$. Pe de altă parte, avem şi $b\mid(db^2+dc^2+b)$, adică $b\mid dc^2$ şi, cum $(b,c)=1$, rezultă $b\mid d$. Prin urmare, $b=d$, deci $m=d^2$, adică m este pătrat perfect.

Remarcă: Dacă $m=d^2$, condiţia din enunţ revine la $cd\mid c^2+d^2+1$. Se poate demonstra (cu metode ce depăşesc clasa a VII-a)[1] că în toate situaţiile în care se întâmplă acest lucru avem $c^2+d^2+1=3cd$.

Problema 2. Aflaţi ultimele 500 de cifre ale numărului

$$N=1!\cdot 2^1\cdot 3+2!\cdot 2^2\cdot 5+3!\cdot 2^3\cdot 7+\ldots+2019!\cdot 2^{2019}\cdot 4039,$$

unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie:
Fiecare termen al sumei din enunţ este de forma $n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)$ şi se poate scrie

$$n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)=n!\cdot 2^n\cdot[2(n+1)-1]=n!\cdot(n+1)\cdot 2^n\cdot 2-n!\cdot 2^n=(n+1)!\cdot 2^{n+1}-n!\cdot 2^n.$$

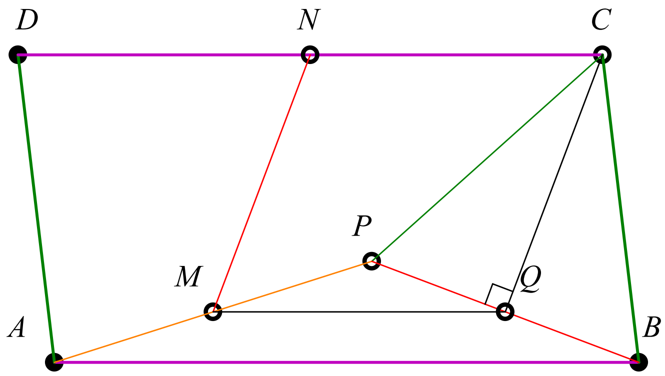
Atunci suma din enunţ se scrie
$N=(2!\cdot 2^2-1!\cdot 2^1)+(3!\cdot 2^3-2!\cdot 2^2)+(4!\cdot 2^4-3!\cdot 2^3)+\ldots+(2019!\cdot 2^{2019}-2018!\cdot 2^{2018})+(2020!\cdot 2^{2020}-2019!\cdot 2^{2019})$.
Observăm că după fiecare termen de forma $-n!\cdot 2^n$ (cu excepţia lui $1!\cdot 2^1$), urmează, după doi termeni, şi numărul $n!\cdot 2^n$ cu care acesta se va reduce. Constatăm că aproape toţi termenii se reduc, din sumă rămânând numai termenii $-1!\cdot 2^1$ şi $2020!\cdot 2^{2020}$. Aşadar, $N=2020!\cdot 2^{2020}-1!\cdot 2^1=2020!\cdot 2^{2020}-2$.
Printre numerele de la 1 la 2020 (care sunt factorii lui 2020!) se află $2020:5=404$ factori divizibili cu 5. Dintre aceştia, fiecare al 5-lea este divizibil cu 5^2, deci 80 sunt divizibili cu 5^2. Fiecare al 5-lea dintre aceştia este divizibil cu 5^3, deci 16 dintre numere sunt multipli de 5^3, iar 3 sunt multipli de 5^4. Aşadar 2020! este divizibil cu $5^{404}\cdot 5^{80}\cdot 5^{16}\cdot 5^3=5^{503}$, prin urmare ultimele 500 de cifre ale lui $2020!\cdot 2^{2020}$ sunt, toate, 0. Prin urmare, ultimele 500 de cifre ale lui $N=2020!\cdot 2^{2020}-2$ sunt 499 de cifre de 9 şi, la urmă, un 8.

[1] *Vieta jumping*, vezi problema 2

Problema 3. Fie P un punct din interiorul paralelogramului $ABCD$ astfel încât să avem $[CP] \equiv [BC]$. Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AP]$ şi respectiv $[CD]$, arătaţi că BP este perpendiculară pe MN.

Cupa Animath, Franţa, 2019

Soluţie: (*Mihai Miculiţa*)
Notând cu Q mijlocul segmentului $[BP]$, avem (vezi figura)



$$\left.\begin{array}{r}[MA] \equiv [MP] \\ [QB] \equiv [QP]\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MQ \parallel AB; \quad (1) \\ |MQ| = \dfrac{|AB|}{2}; \quad (2)\end{array}\right. \quad \text{şi} \quad ABCD - paralelogram \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB \parallel CD; \quad (3) \\ [AB] \equiv [CD]. \quad (4)\end{array}\right.$$

Aşa că din:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} |MQ| = \dfrac{|AB|}{2}\,(2) \\ |CD| = |AB|\,(4) \\ |NC| = |ND| = \dfrac{|CD|}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow [MQ] \equiv [NC] \\ \left.\begin{array}{r} MQ \parallel AB\,(1) \\ AB \parallel CD\,(3) \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel NC\,(=CD) \end{array}\right\} \Rightarrow CNMQ - paralelogram \Rightarrow MN \parallel CQ. \quad (5)$$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{r}[CP] \equiv [BC] \\ [QP] \equiv [QB]\end{array}\right\} \Rightarrow CQ \perp PB. \quad (6)$$

În fine, din relaţiile (5) şi (6), rezultă că: $\boxed{BP \perp MN}$. ■

Remarcă: Problema poate fi privită şi ca o aplicaţie directă a teoremei bisectoarei glisante. Dacă notăm $CP \cap AD = \{V\}$, din teorema bisectoarei glisante rezultă că MN este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle CVD$, deci şi cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle PCB$ (cele două bisectoare sunt paralele). Aceasta din urmă este însă perpendiculară pe PB, de unde rezultă concluzia.

Problema 4. La un turneu de volei, fiecare dintre echipele participante joacă exact un meci împotriva fiecăreia dintre celelalte echipe. Fiecare meci are o echipă câştigătoare care primeşte un punct şi o echipă pierzătoare care primeşte 0 puncte. Se constată că la sfârşitul turneului există o echipă care a acumulat mai puţine puncte decât celelalte şi astfel ea ocupă în clasamentul final, singură, ultimul loc. De asemenea, se observă că fiecare echipă, cu excepţia celei clasate pe ultimul loc, a pierdut exact un meci împotriva unei echipe care a acumulat mai puţine puncte decât ea.
a) Demonstraţi că nu este posibil ca la turneu să fi participat 6 echipe.
b) Arătaţi printr-un exemplu că este posibil ca la turneu să fi participat 7 echipe.

Soluţie:
a) Presupunem că ar putea avea loc un turneu cu 6 echipe care să respecte condiţiile din enunţ. Fiecare din cele 6 echipe dispută câte 5 meciuri, deci sunt 30 de meciuri. Dar fiecare meci a fost numărat de două ori, câte o dată pentru fiecare din echipele care s-au confruntat, deci în realitate se dispută $30 : 2 = 15$ meciuri. Aşadar se acordă în total 15 puncte. Penultima clasată (sau fiecare dintre ele dacă sunt mai multe la egalitate) trebuie să fi pierdut de la ultima clasată, deci ultima clasată are cel puţin un punct. Dacă ar avea două sau mai multe puncte, fiecare dintre celelalte echipe au mai multe, adică minim 3 puncte, ceea ce duce totalul la minim $5 \cdot 3 + 2 = 17 > 15$, ceea ce este imposibil. Aşadar echipa de pe ultimul loc are exact un punct. Atunci pe penultimul loc există o singură echipă (nu pot fi mai multe la egalitate deoarece toate acestea ar fi trebuit să piardă de la ocupanta ultimului loc care nu a câştigat decât un meci). Ea are cel puţin 2 puncte, iar toate celelalte echipe au cel puţin 3 puncte. Dacă penultima clasată are 3 sau mai multe puncte, celelalte echipe ar avea minim 4 puncte, iar totalul ar depăşi 15 puncte. Aşadar penultima clasată are 2 puncte. Echipa de deasupra ei trebuie să aibă 3 puncte (dacă ar avea 4, iarăsi s-ar depăsi totalul de 15). Pot fi cel mult două echipe cu 3 puncte: ele trebuie să fi pierdut de la penultima clasată care are două victorii. Dar atunci totalul este cel puţin $1+2+3+3+4+4 = 17 > 15$, contradicţie.

b) Iată un exemplu de turneu cu 7 echipe, notate A, B, C, D, E, F, G:
A învinge pe B şi totalizează 1 punct.
B învinge C şi D şi totalizează 2 puncte.
C învinge A, D şi E totalizând 3 puncte.
D învinge A, F şi G totalizând 3 puncte.
E învinge A, B, D şi F; F învinge A, B, C şi G, iar G învinge A, B, C şi E, fiecare din echipele E, F, G totalizând 4 puncte.
Acest turneu respectă toate condiţiile din enunţ.