Problema 1. Arătaţi că numărul $2^n+3^n+5^n+6^n$ nu este cub perfect pentru niciun n natural.

Soluţie: Vom demonstra şi folosi următorul fapt cunoscut:

Un cub perfect dă unul din resturile 0, 1 sau 6 la împărţirea cu 7.
Demonstraţie:
• Dacă m este de forma $7k$, atunci $m^3 = 7^3k^3 = M_7$.
• Dacă m este de forma $7k \pm 1$, atunci $m^3 = (7k\pm 1)^3 = 7^3k^3 \pm 3\cdot 7^2k^2 + 3\cdot 7k \pm 1 = M_7 \pm 1$.
• Dacă m este de forma $7k\pm 2$, atunci $m^3 = (7k\pm 2)^3 = 7^3k^3 \pm 3\cdot 7^2k^2\cdot 2 + 3\cdot 7k\cdot 4 \pm 8 = M_7 \pm 1$.
• Dacă m este de forma $7k\pm 3$, atunci $m^3 = (7k\pm 3)^3 = 7^3k^3 \pm 3\cdot 7^2k^2\cdot 3 + 3\cdot 7k\cdot 9 \pm 27 = M_7 \mp 1$.
Se vede din calculele de mai sus că, orice formă ar avea n, cubul său este M_7 sau $M_7 \pm 1$.

În continuare, vom demonstra că numărul $2^n+3^n+5^n+6^n$ nu are niciodată una din formele de mai sus.
• Dacă n este de forma $3k$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $2^n = 8^k = (7+1)^k = M_7 + 1^k = M_7+1$, $3^n = 27^k = (28-1)^k = M_7 + (-1)^k$, $5^n = 125^k = (126-1)^k = M_7+(-1)^k$, iar $6^n = 216^k = (217-1)^k = M_7 + (-1)^k$, prin urmare, în acest caz, numărul $2^n+3^n+5^n+6^n$ dă unul din resturile 4 sau 5 la împărţirea cu 7.
• Dacă n este de forma $3k+1$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $2^n = 2\cdot 8^k = 2\cdot(7+1)^k = M_7+2$, $3^n = 3\cdot 27^k = 3\cdot(28-1)^k = M_7 + 3\cdot(-1)^k$, $5^n = 5\cdot 125^k = 5\cdot(126-1)^k = M_7 + 5\cdot(-1)^k$, iar $6^n = 6\cdot 216^k = 6\cdot(217-1)^k = M_7 + 6\cdot(-1)^k$, prin urmare, în acest caz, numărul $2^n+3^n+5^n+6^n$ dă restul 2 la împărţirea cu 7 (indiferent de paritatea lui k).
• Dacă n este de forma $3k+2$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $2^n = 4\cdot 8^k = 4\cdot(7+1)^k = M_7+4$, $3^n = 9\cdot 27^k = 9\cdot(28-1)^k = M_7 + 2\cdot(-1)^k$, $5^n = 25\cdot 125^k = 25\cdot(126-1)^k = M_7 + 4\cdot(-1)^k$, iar $6^n = 36\cdot 216^k = 36\cdot(217-1)^k = M_7 + (-1)^k$, prin urmare, în acest caz, numărul $2^n+3^n+5^n+6^n$ dă unul din resturile 4 sau 5 la împărţirea cu 7.
Aşadar, cuburile perfecte dau unul din resturile 0,1 sau 6 la împărţirea cu 7, în vreme ce numerele de forma $2^n+3^n+5^n+6^n$ dau unul din resturile 2, 4 sau 5 la împărţirea cu 7. Acest fapt arată că numerele de această formă nu sunt cuburi perfecte.

Problema 2. Există numere întregi impare a, b, c astfel ca

$$(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2 \text{ ?}$$

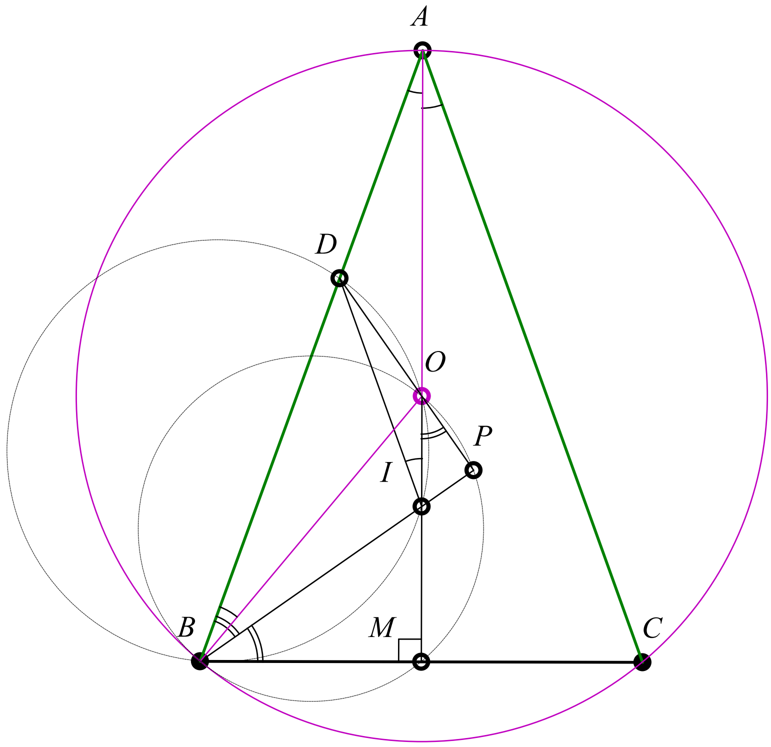
Soluţie: Răspunsul este negativ.
Presupunând că numerele impare a, b, c satisfac egalitatea din enunţ, ar exista numere întregi x, y, z astfel încât $a = 2x+1$, $b = 2y+1$, $c = 2z+1$ şi $(a+b)^2 +$

$(a+c)^2 = (b+c)^2$. Înlocuind $a = 2x+1$, $b = 2y+1$, $c = 2z+1$ în ultima relaţie, ar rezulta că $(2x+2y+2)^2 + (2x+2z+2)^2 = (2y+2z+2)^2$, adică $4(x+y+1)^2+4(x+z+1)^2 = 4(y+z+1)^2$. Împărţind cu 4 şi desfăcând parantezele, ajungem la $2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+4x+2y+2z+2 = y^2+z^2+2yz+2y+2z+1$, adică la $2(x^2+xy+xz+2x+1) = 2yz+1$. Dar numărul din membrul stâng este par, în vreme ce numărul din membrul drept este impar, deci această egalitate nu poate avea loc. Am ajuns astfel la o contradicţie. Aşadar, nu există numere impare a, b, c care să satisfacă relaţia dată.

Remarcă: Există numere a, b, c (nu toate impare) astfel încât $(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$. Într-adevăr, putem alege, de pildă, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, caz în care relaţia din enunţ devine celebra $3^2+4^2 = 5^2$. (Alt exemplu: $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$.)

Problema 3. Fie I centrul cercului înscris şi O centrul cercului circumscris triunghiului isoscel ABC, având vârful în A. Notăm cu D punctul de intersecţie a laturii $[AB]$ cu paralela dusă prin punctul I la latura $[AC]$. Arătaţi că $BI \perp OD$.

Thanasis Gakopoulos (Ayme)



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notăm cu M – mijlocul laturii $[BC]$ şi cu $\{P\} = BI \cap OD$, întrucât: $[AB] \equiv [AC] \Rightarrow O, I \in [AM]$, avem:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} ID \parallel AC \Rightarrow \widehat{DIO} \equiv \underline{\widehat{MAC}} \\ \underline{\widehat{MAC}} \equiv \underline{\underline{\widehat{MAB}}} \\ [OA] \equiv [OB] \Rightarrow \underline{\underline{\widehat{MAB}}} \equiv \widehat{DBO} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DIO} \equiv \widehat{DBO} \Rightarrow DBIO - inscriptibil \Rightarrow \widehat{POI} \equiv \underline{\widehat{IBD}} \\ \underline{\widehat{IBD}} \equiv \widehat{IBC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

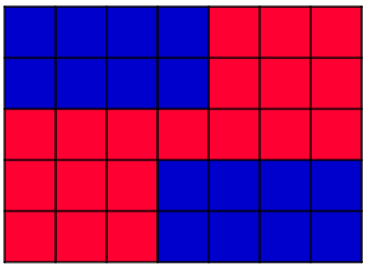
$$\Rightarrow \widehat{POI} \equiv \widehat{IBC} \Rightarrow OBMP - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{BPD}\right) = m\left(\widehat{BMO}\right) = 90^0 \Rightarrow \boxed{BI \perp OD}. \blacksquare$$

Demonstraţia de mai sus funcţionează în cazul $m(\sphericalangle BAC) < 60°$. Cazul $m(\sphericalangle BAC) = 60°$ este banal. Cazul $m(\sphericalangle BAC) > 60°$ este analog: punctele B, I, O, D rămân conciclice dar vin pe cerc în ordinea B, O, I, D.

Îi mulţumesc domnului profesor *Mihai Miculiţa* pentru a-mi fi trimis problema.

Problema 4. Fie m şi n două numere impare, $m, n \geq 3$. Un dreptunghi $m \times n$ este împărţit în $m \cdot n$ pătrăţele de latură 1. Fiecare pătrăţel se colorează fie cu roşu fie cu albastru. Notăm cu A numărul liniilor care conţin mai multe pătrăţele albastre decât roşii şi cu B numărul coloanelor care conţin mai multe pătrăţele roşii decât albastre. Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $A + B$?

Soluţie: Vom demonstra că răspunsul este $m + n - 2$.
Această valoare poate fi întotdeauna obţinută, de exemplu cu următoarea colorare: colorăm cu roşu toate pătrăţelele aflate pe linia din mijloc şi colorăm cu albastru toate pătrăţelele aflate pe coloana din mijloc cu excepţia pătrăţelului din centru care a fost deja colorat cu roşu. Am împărţit astfel dreptunghiul în patru dreptunghiuri mai mici. Colorăm cu albastru toate pătrăţelele din dreptunghiurile situate în colţurile din stânga-sus şi din dreapta-jos şi colorăm cu roşu toate pătrăţelele situate în celelalte două dreptunghiuri. Astfel, pe fiecare linie, cu excepţia celei din mijloc, numărul pătrăţelelor albastre va fi cu 1 mai mare decât cel al pătrăţelelor roşii, iar pe fiecare coloană, cu excepţia celei din mijloc, numărul pătrăţelelor roşii va fi cu 1 mai mare decât cel al pătrăţelelor albastre. Astfel, $A = m - 1$ şi $B = n - 1$, deci $A + B = m + n - 2$. Ilustrăm mai jos exemplul pe o tablă 5×7.



Rămâne să arătăm că $A + B$ nu poate fi $m + n - 1$ sau $m + n$.
Faptul că $A + B < m + n$ este destul de evident: dacă $A + B = m + n$, atunci avem neapărat $A = m$ şi $B = n$, dar acest lucru înseamnă că pe fiecare linie avem mai multe pătrăţele albastre decât roşii şi pe fiecare coloană avem mai multe pătrăţele roşii decât albastre. Dar atunci, în total, ar trebui să avem pe de-o parte mai multe pătrăţele albastre decât roşii (însumând pe linii), pe de altă parte ar trebui să avem în total mai multe pătrăţele roşii decât albastre (asta dacă însumăm pe coloane). Contradicţia obţinută arată că nu putem avea $A + B = m + n$.
Dacă $A+B = m+n-1$, atunci avem fie $A = m$ şi $B = n-1$, fie $A = m-1$ şi $B = n$. Vo considera doar primul caz, al doilea fiind analog. Dacă $A = m$, atunci pe fiecare linie avem mai multe pătrăţele albastre decât roşii, deci diferenţa dintre numărul pătrăţelelor albastre situate pe tablă şi numărul pătrăţelelor roşii de pe tablă este

cel puţin m. Pe de altă parte, dacă $B = n - 1$, atunci pe $n - 1$ dintre coloane avem mai multe pătrăţele roşii decât albastre. Pe cea de-a n-a coloană putem avea cel mult m pătrăţele albastre, deci diferenţa dintre numărul pătrăţelelor albastre de pe tablă şi numărul pătrăţelelor roşii de pe tablă este cel mult $m - (n - 1) < m$, ceea ce conduce la o contradicţie. Aşadar nu putem avea $A + B = m + n - 1$, prin urmare valoarea maximă a acestei sume este $m + n - 2$.