Programul upper.school de pregătire pentru JBMO

Simulare baraj 1

21 decembrie 2019

§1 Soluții

Problema 1

Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Arătați că:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Demonstrație. Din inegalitatea mediilor avem $a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc}$, $b^2+ac \geq 2b\sqrt{ac}$, $c^2+ab \geq 2c\sqrt{ab}$. Așadar avem:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$$

Dar din inegalitatea mediilor, din nou avem și:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{bc}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ac}}$$

Prin adunarea acestor relații obținem:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

□

Problema 2

Fie $ABCD$ un romb cu $AC \cap BD = \{O\}$ și P un punct în interiorul rombului, nesituat pe diagonale astfel încât proiecțiile sale pe laturile rombului sunt puncte interioare segmentelor (AB), (BC), (CD), (DA). Se notează cu M, N, Q, R proiecțiile punctului P pe laturile $(AB), (BC), (CD)$ și respectiv (DA); $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $Q \in (CD)$ și $R \in (AD)$. Mediatoarea segmentului $[MN]$ intersectează mediatoarea lui $[RQ]$ în S; Mediatoarea segmentului $[NQ]$ intersectează mediatoarea segmentului $[MR]$ în T. Să se demonstreze că $PSOT$ este dreptunghi.

Demonstrație. Fie X și Y proiecțiile lui P pe BD, respectiv AC. Observăm că punctele X, P, R, D, Q se găsesc pe cercul de diametru PD, iar $(DX$ este bisectoarea unghiului $\angle RDQ$, deci $XR = XQ$. În mod analog, din M, P, X, N, B conciclice pe cercul de diametru PB și $(BX$ este bisectoarea unghiului $\angle MBN$ obținem $MX = NX$. Astfel am obținut că X se găsește la intersecția mediatoarelor lui $[MN]$ și $[RQ]$. În concluzie am demonstrat că $X = S$. În mod analog obținem și că $Y = T$. Din construcția punctelor X, Y avem în mod evident $PSOT$ dreptunghi. □

Problema 3

Fie $t(n)$ cel mai mic divizor prim al lui n pentru fiecare n număr natural, $n \geq 2$. Să se demonstreze că:

$$t(n) < t(3^n - 2^n).$$

(Twenty-Fourth Competition, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, 2000)

Demonstrație. Fie $p = t(3^n - 2^n)$, în particular $p \mid 3^n - 2^n$. Cu alte cuvinte, $3^n \equiv 2^n \ (mod\ p)$. În mod evident $(6, p) = 1$, deci 2 are un invers mod p. Fie a astfel încât $2a \equiv 1 \ (mod\ p)$.

$$p \mid 3^n - 2^n \implies p \mid (3a)^n - (2a)^n \implies p \mid (3a)^n - 1$$

Fie m ordinul lui $(3a)$ mod p. Din definiția ordinului $m \mid (p-1, n)$. Dacă $m = 1$ atunci $p \mid 3a - 1 \implies p \mid 3a - 2a \implies p \mid a \implies p \mid 1$. Fie acum q prim astfel încât $q \mid m \mid (p-1, n) \implies q \mid n$ și $q \leq p - 1$. Am obținut deci că:

$$t(n) \leq q \leq p - 1 < p = t(3^n - 2^n)$$

□

Soluția 2. Fie $p = t(3^n - 2^n)$, în particular $p \mid 3^n - 2^n$. Fie m cel mai mic număr natural nenul astfel încât $3^m \equiv 2^m \ (mod\ p)$. În mod evident $(6, p) = 1$. Fie $3^k \equiv 2^k \ (mod\ p)$. Fie $k = mq + r$ cu q, r naturale astfel încât $0 \leq r < m$.

$$3^k \equiv 2^k \ (mod\ p) \implies 3^r (3^m)^q \equiv 2^r (2^m)^q \ (mod\ p)$$

Din $3^m \equiv 2^m$ și $(6, p) = 1$ obținem că $3^r \equiv 2^r \ (mod\ p)$. Din definiția lui m obținem $r = 0$. Am obținut, prin urmare că oricare ar fi k cu $3^k \equiv 2^k \ (mod\ p)$ avem $m \mid k$. Pentru că $(6, p) = 1$ conform teoremei lui Fermat avem:

$$3^{p-1} \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p) \implies m \mid p - 1$$

Dar $m \mid n$, așadar $m \mid (n, p-1)$. De unde rezultă concluzia exact ca în soluția precedentă. □

Problema 4

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Fiecare pătrățel unitate al unei table $n \times n$ este colorat fie cu roșu, fie cu albastru. Așezăm dominouri pe tablă, fiecare acoperind câte două pătrățele unitate vecine de pe tablă. Un asemenea domino se numește monocolor dacă acoperă două pătrățele roșii sau două pătrățele albastre și se numește bicolor dacă acoperă un pătrățel roșu și unul albastru. Determinați cel mai mare număr natural k având următoarea proprietate: indiferent de cum este colorată la început tabla, putem plasa pe tablă, fără suprapuneri, k dominouri care să fie toate monocolore sau toate bicolore.

Demonstrație. Vom demonstra că cel mai mare număr natural cu proprietatea cerută este $k = [\frac{n^2}{4}]$.
Dacă n este par, $n = 2m$, tabla poate fi pavată cu $2m^2$ dominouri, dintre care cel puțin $m^2 = [\frac{n^2}{4}]$ vor fi de același tip (monocolore sau bicolore).
Dacă n este impar, $n = 2m + 1$, putem plasa pe tablă $2m^2 + 2m$ dominouri, dintre care cel puțin $m^2 + m = [\frac{n^2}{4}]$ vor fi de același tip (monocolore sau bicolore).
Prin urmare, întotdeauna putem plasa pe tablă $M = [\frac{n^2}{4}]$ dominouri de același tip. În continuare demonstrăm că nu pentru orice colorare inițială putem plasa mai mult de M dominouri de același tip.
Să colorăm pătrățelele tablei cu alb și negru, asemenea unei table de șah. Atunci orice domino acoperă un pătrățel alb și unul negru. Dacă n este par avem $2m^2$ pătrățele negre, iar dacă n este impar, colorăm colțul tablei cu alb și obținem $2m^2 + 2m$ pătrățele negre. Așadar, în ambele cazuri, avem un număr par de pătrățele negre. Dacă recolorăm jumătate din pătrățelele negre cu albastru, iar toate restul pătrățelelor de pe tablă cu roșu (cele negre rămase și toate cele albe), demonstrăm că nu putem plasa mai mult de M dominouri de același tip, în acest caz. Avem exact M pătrățele albastre, deci maxim M bicolore. Niciun domino nu acoperă 2 pătrățele albastre, deci orice domino monocolor acoperă 2 roșii, inițial alb și negru colorate. Sunt exact M pătrățele roșii care provin din negre, deci putem plasa cel mult M dominouri monocolore. $\square$