Problema săptămânii 176
Fie S o submulţime a mulţimii $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ cu proprietatea că nicicare două submulţimi disjuncte ale lui S nu au aceeaşi sumă a elementelor.
Care este valoarea maximă pe care o poate avea suma elementelor mulţimii S?

Concursul AIME, 1986

Soluţie: Vom arăta că suma maximă este 61, atinsă pentru $S = \{8, 11, 13, 14, 15\}$.
Este uşor de verificat că această submulţime îndeplineşte condiţiile din enunţ.
Vom arăta că nu există mulţimi cu proprietatea din enunţ care să aibă mai mult de cinci elemente şi că nicio mulţime cu 5 sau mai puţine elemente care are proprietatea din enunţ nu are suma elementelor mai mare ca 61.
1. Presupunând că ar exista o mulţime cu cel puţin şase elemente cu proprietatea din enunţ, ne uităm la submulţimile ei nevide care au cel mult patru elemente. Numărul minim se atinge când mulţimea are şase elemente. Vom face numărătoarea în acest caz. Vor fi $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 = 1 + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{24} = 6 + 15 + 20 + 15 = 56$ de asemenea submulţimi.[1] Pe de altă parte, suma elementelor dintr-o astfel de mulţime este cel puţin 1 şi cel mult $12 + 13 + 14 + 15 = 54$. Aşadar sunt 56 de submulţimi şi doar 54 de sume posibile; din principiul cutiei rezultă că vor exista două submulţimi care au aceeaşi sumă a elementelor. Atunci eliminând eventualele elemente comune, vom obţine două submulţimi disjuncte cu aceeaşi sumă a elementelor. Aşadar nicio mulţime cu 6 sau mai multe elemente nu are proprietatea din enunţ.
2. Vom arăta că niciuna din submulţimile cu 5 sau mai puţine elemente care are proprietatea din enunţ nu are suma elementelor mai mare ca 61.
O submulţime cu 4 sau mai puţine elemente are suma elementelor cel mult $12 + 13 + 14 + 15 = 54 < 61$.
O submulţime cu 5 elemente mai mici decât 15 are suma elementelor cel mult $14 + 13 + 12 + 11 + 10 = 60 < 61$.
O submulţime cu 5 elemente care nu îl conţine pe 14 are suma elementelor cel mult 61.
În continuare examinăm submulţimile cu 5 elemente care au proprietatea din enunţ şi conţin numerele 14 şi 15.
Atunci mulţimea nu poate conţine numere consecutive n şi $n+1$ mai mici decât 14

[1] Pentru cine nu ştie ,,combinări": numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente se notează cu C_n^k şi se citeşte *combinări de n luate câte k*. Acest număr se calculează cu formula $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ dacă $k \leq n$, unde $x! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$ dacă $x > 0$ şi $0! = 1$. Formula se poate deduce astfel: alegem un prim element al submulţimii (avem n variante), apoi un al doilea ($n-1$ variante), etc, în fine, alegem un al k-lea element (avem $n-k+1$ variante). Obţinem astfel $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ rezultate, însă printre aceste rezultate fiecare submulţime apare de exect $k!$ ori (elementele ei pot fi alese în $k!$ ordini posibile). Aşadar, sunt $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ submulţimi cu k elemente.

deoarece submulţimile $\{14, n+1\}$ şi $\{n, 15\}$ ar avea aceeaşi sumă a elementelor.
Dacă 13 nu e în submulţime, atunci suma poate fi cel mult $8+10+12+14+15 < 61$.
Dacă 13 este în submulţime, atunci 12 nu este, deci suma poate fi cel mult $9 + 11 + 13 + 14 + 15 = 62$. Iar suma 62, singura mai mare ca 61 pe care încă nu am exclus-o, se atinge numai în cazul submulţimii $\{9, 11, 13, 14, 15\}$. Însă ea nu satisface enunţul deoarece $9 + 15 = 11 + 13$.
Aşadar nu există submulţimi cu proprietatea din enunţ şi care să aibă suma elementelor mai mare ca 61.

Problem of the week no. 176

Let the sum of a set of numbers be the sum of its elements. Let S be a set of positive integers, none greater than 15. Suppose no two disjoint subsets of S have the same sum. What is the largest sum a set S with these properties can have?

AIME 1986

For the official solution, see here.