Problema săptămânii 175
Fie n un număr natural nenul şi

$$A_n = \left\{(x, y) \mid c.m.m.d.c.\{x, y\} = 1,\ 0 < x, y \le n,\ x + y > n\right\}.$$

Calculaţi suma tuturor fracţiilor de forma $\dfrac{1}{xy}$ cu $(x, y) \in A_n$.

Revista KöMaL

Soluţie: Vom demonstra prin inducţie după $n \ge 1$ că suma fracţiilor de forma $\dfrac{1}{xy}$ cu $(x, y) \in A_n$ este 1.
Deoarece $A_1 = \{(1, 2),\ (2, 1)\}$, pentru $n = 1$ obţinem suma $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 1} = 1$.
Presupunem că, pentru un $n \ge 1$ fixat, suma fracţiilor de forma $\dfrac{1}{xy}$ cu $(x, y) \in A_n$ este 1 şi arătăm că suma fracţiilor de forma $\dfrac{1}{xy}$ cu $(x, y) \in A_{n+1}$ este tot 1.
Comparăm mulţimile A_n şi A_{n+1}. Constatăm că
$A_n \setminus A_{n+1} = \left\{(x, y) \mid c.m.m.d.c.\{x, y\} = 1,\ 0 < x, y \le n,\ x + y = n + 1\right\} = \left\{(x,\ n + 1 - x) \mid 1 \le x \le n,\ c.m.m.d.c.(x,\ n + 1) = 1\right\}$ şi că
$A_{n+1} \setminus A_n = \left\{(x,\ n + 1) \mid c.m.m.d.c.\{x,\ n + 1\} = 1,\ 0 < x \le n\right\} \cup \left\{(n + 1,\ x) \mid c.m.m.d.c.\{x,\ n + 1\} = 1,\ 0 < x \le n\right\}$.
Trebuie, aşadar, să verificăm că suma fracţiilor de forma $\dfrac{1}{xy}$ cu $(x, y) \in A_n \setminus A_{n+1}$ este egală cu suma fracţiilor de forma $\dfrac{1}{xy}$ cu $(x, y) \in A_{n+1} \setminus A_n$, adică

$$\sum \frac{1}{x(n + 1 - x)} = 2 \sum \frac{1}{x(n + 1)},$$

unde ambele sume de mai sus se fac după $1 \le x \le n$, cu $c.m.m.d.c.\{x,\ n + 1\} = 1$.
Dar egalitatea de mai sus revine la $\sum \dfrac{n + 1}{x(n + 1 - x)} = 2 \sum \dfrac{1}{x}$, adică la

$\sum \dfrac{1}{x} + \sum \dfrac{1}{n + 1 - x} = 2 \sum \dfrac{1}{x}$, ceea ce este evident deoarece
$c.m.m.d.c.\{x,\ n + 1\} = 1 \Leftrightarrow c.m.m.d.c.\{n + 1 - x,\ n + 1\} = 1$.

Problem of the week no. 175
Let n be a positive integer. Consider the set

$$A_n = \left\{(x, y) \mid g.c.d.\{x, y\} = 1,\ 0 < x, y \le n,\ x + y > n\right\}.$$

Compute the sum of all the fractions $\dfrac{1}{xy}$ with $(x, y) \in A_n$.

KöMaL

Click here for the official solution.