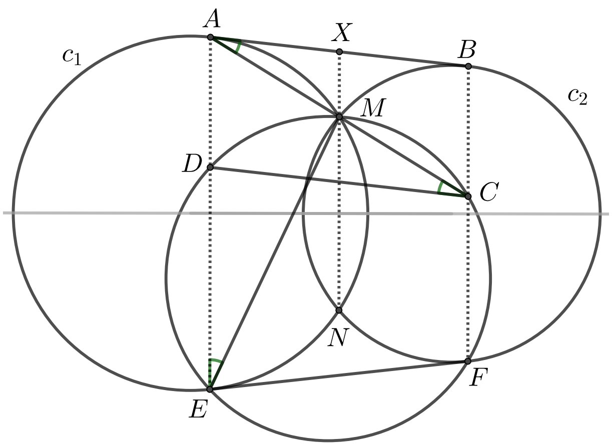
Problema săptămânii 173

Două cercuri, c_1 şi c_2, se intersectează în M şi N. Tangenta comună celor două cercuri care este mai apropiată de M intersectează cercurile c_1 şi c_2 în punctele A, respectiv B. Fie C şi D simetricele lui A, respectiv B, faţă de M. Cercul circumscris triunghiului DCM intersectează cercurile c_1 şi c_2 în punctele E, respectiv F, diferite de M. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor MEF şi NEF au aceeaşi rază.

Baraj Franţa, 2014

Soluţia oficială:

Să arătăm mai întâi că EF este cealaltă tangentă comună a celor două cercuri.
Fie O_1 şi O_2 centrele cercurilor c_1 şi respectiv c_2, E' şi F' punctele de contact ale celeilalte tangente comune şi $\{X\} = AB \cap MN$. Atunci $AX = BX$ căci X se situează pe axa radicală a celor două cercuri. Cum $ABCD$ este un paralelogram de centru M, avem $MX \parallel AD$, ceea ce implică $AD \perp O_1O_2$. În plus, A şi E' fiind simetrice faţă de O_1O_2, rezultă că punctele A, D şi E' sunt coliniare şi la fel şi punctele B, C şi F'.
Atunci, din cercul c_1, avem că $\sphericalangle ME'D = \sphericalangle AE'M \equiv \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MCD$, deci E' se află pe cercul circumscris triunghiului MCD. Conchidem că $E' = E$ şi, la fel, $F' = F$.
Din simetria faţă de dreapta O_1O_2 se vede că cercurile circumscrise triunghiurilor NEF şi MAB au aceeaşi rază, iar din simetria faţă de M se vede că cercurile circumscrise triunghiurilor MAB şi MCD (adică MEF) au aceeaşi rază, de unde rezultă concluzia.



Remarci: Se putea observa că $m(\sphericalangle ENF) = 180^\circ - m(\sphericalangle EMF)$, deci E, M, N şi ortocentrul H al triunghiului MEF sunt conciclice. (*Luca Pană* observă că N este punctul M-Humpty al triunghiului MEF despre care se ştie că se află pe cercul circumscris lui HEF.) Se ştie că cercul circumscris triunghiului HEF (deci triunghiului NEF) este simetricul cercului circumscris triunghiului MEF faţă de BC, deci cele două cercuri au aceeaşi rază. Sau, alternativ, din $m(\sphericalangle ENF) = 180^\circ - m(\sphericalangle EMF)$ şi teorema sinusurilor în triunghiurile MEF şi NEF se obţine direct egalitatea razelor.

Problem of the week no. 173
Two circles, c_1 and c_2 intersect at M and N. The common tangent to the two circle that is closer to M touches the circles c_1 and c_2 at A and B, respectively. Let C and D be the reflections of the points A and B across the point M. The circumcircle of triangle DCM intersects the circles c_1 and c_2 at the points E and F, different from M. Prove that the circumcircles of triangles MEF and NEF have equal radii.

French TST, 2014

Official solution:
Let us start by proving that EF is the other common tangent to the two circles. Let O_1 and O_2 be the centers of circles c_1 and c_2 respectively, E' and F' the touch-points of the other common tangent with the two circles, and $\{X\} = AB \cap MN$. Then $AX = BX$ because X is situated on the radical axis of the two circles. As $ABCD$ is a parallelogram of center M, we have $MX \parallel AD$, which means that $AD \perp O_1O_2$. Moreover, A and E' are symmetric with respect to O_1O_2, therefore A, D and E' are collinear and so are B, C and F'.
From circle c_1 we get $\sphericalangle ME'D = \sphericalangle AE'M = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MCD$, hence E' lies on the circumcircle of triangle MCD. We conclude that $E' = E$ and, similarly $F' = F$.
From the symmetry with respect to the line O_1O_2 it follows that the circumcircles of triangles NEF and MAB have equal radii, while from the symmetry across the point M it follows that the circumcircles of triangles MAB and MCD (i.e. MEF) have equal radii, which leads to the conclusion.