

Problema săptămânii 172

În fiecare pătrățel al unei table $3 \times n$ a fost scris câte un număr astfel încât fiecare rând să conțină numerele $1, 2, \dots, n$ scrise într-o anumită ordine. Se știe că, pentru fiecare coloană, suma produselor de câte două numere situate în respectiva coloană este divizibilă cu n (adică: dacă într-o coloană se află numerele a, b, c , atunci $n \mid ab + bc + ca$). Aflați toate valorile posibile ale lui n .

Olimpiadă Sankt Petersburg, 2017

Soluție: Dacă n este par, în tabel avem la fel de multe numere pare ca și impare, deci va exista o coloană pe care să fie cel puțin două numere impare. Într-o astfel de coloană suma produselor de câte două este impară, deci nedivizibilă cu n . Așadar niciun n par nu are proprietatea din enunț.

În continuare arătăm că toate numerele impare satisfac condiția. Vom completa tabelul astfel: în coloana n scriem numerele n, n, n . În fiecare coloană $k < n$ scriem numerele k, k și $k \cdot \frac{n-1}{2} \pmod{n}$. Suma produselor de câte două în coloana $k < n$ este $k^2n \equiv 0 \pmod{n}$. Numerele din rândul al treilea formează o permutare a numerelor $1, 2, \dots, n$, deoarece $\frac{n-1}{2}$ și n sunt prime între ele.

Problem of the week no. 172

Each cell of a $3 \times n$ table has been filled with a number. In each of the three rows, the numbers $1, 2, \dots, n$ appear in some order. It is known that for each column, the sum of the pairwise products of the three numbers in it is a multiple of n . Find all possible values of n .

Sankt Petersburg Mathematical Olympiad, 2017

Solution: When n is even, then in some column there are at least two odd numbers. In such a column the sum of pairwise products is odd, so it is not divisible by n .

All n odd work. To see it, write in column k the numbers k, k , and $k \cdot \frac{n-1}{2}$ taken modulo n . (In the last column we have n, n, n .) The sum of the pairwise products in column k is $k^2n \equiv 0 \pmod{n}$. The numbers in the third row form a permutation of $1, 2, \dots, n$, because $\frac{n-1}{2}$ and n are co-prime.