Stelele Matematicii 2019, Juniori – Enunţuri

Problema 1. Determinaţi numerele naturale care au următoarea proprietate: pentru orice divizor pozitiv d al lui n, $d+1$ este un divizor al lui $n+1$.

Problema 2. Fie A şi C două puncte pe un cerc $\mathscr{C}$ astfel încât (AC) să nu fie diametru şi fie P un punct al segmentului (AC) diferit de mijlocul acestuia. Cercurile c_1 şi c_2, tangente interior în A, respectiv C la cercul $\mathscr{C}$ trec prin punctul P şi se intersectează a doua oară în punctul Q. Dreapta PQ intersectează cercul $\mathscr{C}$ în punctele B şi D. Cercul c_1 intersectează segmentele (AB) şi (AD) în K, respectiv N, iar cercul c_2 intersectează segmentele (CB) şi (CD) în L, respectiv M. Demonstraţi că:
a) patrulaterul $KLMN$ este trapez isoscel;
b) Q este mijlocul segmentului (BD).

Problema 3. Pe tablă sunt scrise iniţial trei numere naturale consecutive, $n-1$, n, $n+1$. La o mutare, se aleg două dintre ele, a şi b, şi se înlocuiesc cu $2a-b$ şi $2b-a$. Pentru ce valori ale lui n este posibil ca, după o succesiune de asemenea mutări, două dintre numerele de pe tablă să fie egale cu 0?

Problema 4. Arătaţi că dacă numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au produsul 1, atunci

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1}+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \geq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$