PENTRU CERCURILE DE ELEVI

UNELE DESCOMPUNERI ÎN FACTORI MAI SPECIALE
fişa selectată de Andrei Eckstein

Descompunerile în factori sunt foarte importante pentru că, prin factorizarea $F = G \cdot H$, ele permit reducerea unor ecuaţii de tipul $F = 0$, la ecuaţiile (mai simple) $G = 0$ şi $H = 0$.

I. identitatea Sophie Germain:

$$x^4 + 4y^4 = ((x+y)^2 + y^2)((x-y)^2 + y^2) = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2).$$

Ideea de demonstraţie: se adună şi se scade $4x^2y^2$

Aplicaţii:

1. Arătaţi că numărul $5^{12} + 2^{10}$ este compus.

Olimpiadă Sankt Petersburg

2. Calculaţi $\dfrac{2014^4 + 4 \times 2013^4}{2013^2 + 4027^2} - \dfrac{2012^4 + 4 \times 2013^4}{2013^2 + 4025^2}$.

Olimpiadă Marea Britanie, 2013-2014, runda 1, pb 1

3. Calculaţi

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}.$$

Concursul AIME, 1987, pb 14

4. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.
b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori, fiecare mai mare decât 10^{2009}.

Dorin Andrica, ONM 2009, clasa a 7-a, pb 3, Olimpiadă Costa Rica 2010

II. descompunerea lui $x^4 + x^2 + 1$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Ideea de demonstraţie: se adună şi se scade x^2

Aplicaţii:

1. Calculaţi $\dfrac{1^4+2007^4+2008^4}{1^2+2007^2+2008^2}$.

Olimpiadă Marea Britanie, 2007-2008, runda 1, pb 1

2. a) Descompuneţi în factori $x^{2^n}+x^{2^{n-1}}+1$.
b) Arătaţi că numărul $3^{2^n}+3^{2^{n-1}}+1$ are cel puţin n divizori primi distincţi.

3. Calculaţi suma $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{n}{n^4+n^2+1}$.

4. a) Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul n^4+n^2+1 este prim.
b) Demonstraţi că numărul

$$A=\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)\dots(100^4+100^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)\dots(99^4+99^2+1)}$$

este natural.

Dorel Miheţ, Concursul Traian Lalescu, 2014, clasa a VII-a, pb 1

Generalizare:

$x^{4n}+x^{4n-2}+\ldots+x^2+1=(x^{2n}+x^{2n-2}+\ldots+1)^2-(x^{2n-1}+x^{2n-3}+\ldots+x)^2$

Ideea de demonstraţie: Se foloseşte formula $y^{2m}+y^{2m-2}+\ldots+1=\dfrac{y^{2m+2}-1}{y^2-1}$;

Se restrâng cele trei sume. Pentru $x=\pm1$ identitatea trebuie demonstrată separat.

Aplicaţii:

Arătaţi că singurul număr prim de forma $1010\dots101$ este 101.
(Se poate însă, alternativ, studia şi ce se întâmplă dacă înmulţim cu 99.)

III. descompunerea lui $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

Ideea de demonstraţie: calcul direct

morala: deoarece $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$, $\forall\, x,y,x\in\mathbb{R}$ (cu egalitate dacă $x=y=z$), rezultă că inegalitatea

$$x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$$

are loc pentru orice x, y, z cu $x+y+z \geq 0$. Acest rezultat este mai general decât cel oferit de inegalitatea mediilor aplicată pentru numerele x^3, y^3, z^3 (care funcţionează numai pentru numere pozitive).

Aplicaţii:

1. Arătaţi că orice număr prim $p > 3$ se scrie sub forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, cu $x, y, z \in \mathbb{N}$. În plus, această scriere este unică abstracţie făcând de ordinea termenilor.

2. Dacă numerele reale a, b, c, d au suma 0, arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abd + acd + bcd)$. Generalizare.

IV. Alte descompuneri

1. Simplificaţi expresia $\dfrac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}$.

Matematica v şcole nr. 1/1985

2. a) Aflaţi toate numerele prime p ştiind că ecuaţia

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 3xyz = p^2$$

are soluţii numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8/2015

b) Aflaţi toate numerele prime p şi numerele naturale nenule n pentru care ecuaţia

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz = p^n$$

are soluţii numere naturale nenule şi determinaţi numărul acestor soluţii.

Andrei Eckstein, VO Câmpulung, 2015

3. $n^5 + n^4 + 1 = n^5 + n^4 + n^3 - n^3 + 1 = n^3(n^2 + n + 1) - (n-1)(n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1)$

4. $x^{2n+1} - x^{2n-1} + x^{n+1} + x^{n-1} + 1 = (x^{n+1} - x^n + 1)(x^n + x^{n-1} + 1)$

5. IMPORTANT:
Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfac $a \neq 0$ şi $b^2 - 4ac \geq 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, unde $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Aplicaţie:

Demonstraţi că numărul $\underbrace{999\ldots9}_{2011 \text{ cifre}} + 1\underbrace{999\ldots9}_{1005 \text{ cifre}}\underbrace{000\ldots0}_{1005 \text{ cifre}}$ este compus.

EXERCIŢII TEMĂ

1. Arătaţi că există un număr infinit de numere naturale a cu proprietatea că $n^4 + a$ este număr compus pentru orice număr natural n.

OIM 1969, Problema 1

2. Fie $k \geq 2$ un număr natural. Descompuneţi în factori expresia

$$a^k(b-c) + b^k(c-a) + c^k(a-b).$$

Indicaţie: $c - a = (c - b) + (b - a)$.

3. Fie p un număr prim şi x un număr întreg astfel încât

$$p \mid x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1\ .$$

Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \text{ şi } x^{10} + x^5 + 1$$

este divizibil cu p.

Concursul Traian Lalescu, 2017

4. Dacă a, b, c sunt numere reale nenule cu suma 0, arătaţi că

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2} + \frac{b^2}{b^2-(c-a)^2} + \frac{c^2}{c^2-(a-b)^2} = \frac{3}{4}\,.$$

I. Dumitriu-Arad, RMT, 1924

5. Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că există numere naturale nenule a şi b astfel încât $\dfrac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = n^2 + n + 1$.

Nordic Mathematical Contest, 2017

6. Numărul $10001 = 73 \cdot 137$ nu este prim. Arătaţi că niciunul din termenii şirului

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\ \ldots$$

nu este număr prim.

Olimpiadă Bosnia şi Herţegovina, 2018