Problema săptămânii 171
Notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n în baza 10. Dacă $s(m) = 20$, iar $s(33m) = 120$, cât este $s(3m)$?

Olimpiadă Puerto Rico, 2019

Soluţie: Se ştie că dacă a şi b sunt două numere naturale, atunci $s(a + b) \leq s(a) + s(b)$.
Într-adevăr, $s(a+b) = s(a)+s(b)-9k$, unde k este numărul de treceri peste ordin întâlnite la efectuarea adunării $a + b$.
Folosind acest rezultat, deducem că $s(ka) \leq k \cdot s(a)$ pentru orice $a, k \in \mathbb{N}$.
Atunci avem pe de-o parte $s(3m) \leq 3s(m) = 60$, pe de altă parte $120 = s(33m) \leq s(3m) + s(30m) = s(m) + s(m) = 2s(m)$, de unde $s(3m) = 60$.

Soluţia 2: (*Luca Pană*)
Vom folosi următoarea proprietate cunoscută: $s(a \cdot b) \leq s(a) \cdot s(b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$.
Va rezulta că $120 = s(33m) \leq s(3m) \cdot s(11) = 2 \cdot s(3m)$, adică $s(3m) \geq 60$.
Pe de altă parte, $s(3m) \leq s(3) \cdot s(m) = 3 \cdot 20 = 60$.
În concluzie, $s(3m) = 60$.

Problem of the week no. 171
Let $s(n)$ denote the sum of digits of a positive integer n in base 10. If $s(m) = 20$ and $s(33m) = 120$, what is the value of $s(3m)$?

Puerto Rico Mathematical Olympiad, 2019

Solution: It is well-known that $s(a+b) \leq s(a)+s(b)$ for all positive integers a şi b.
In fact, $s(a + b) = s(a) + s(b) - 9k$, where k is the number of carryovers that occur when performing $a + b$.
From this result, it follows that $s(ka) \leq k \cdot s(a)$ for all $a, k \in \mathbb{N}$.
Then, on the one hand we have $s(3m) \leq 3s(m) = 60$, on the other hand $120 = s(33m) \leq s(3m) + s(30m) = s(m) + s(m) = 2s(m)$, hence $s(3m) = 60$.

Solution 2: (*Luca Pană*)
It is well-known that $s(a \cdot b) \leq s(a) \cdot s(b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$.
It follows that $120 = s(33m) \leq s(3m) \cdot s(11) = 2 \cdot s(3m)$, i.e. $s(3m) \geq 60$.
On the other hand, $s(3m) \leq s(3) \cdot s(m) = 3 \cdot 20 = 60$.
We conclude that, $s(3m) = 60$.