Problema săptămânii 170
a) Demonstraţi că există cinci numere reale nenegative cu suma 1 care au următoarea proprietate: oricum am aşeza cele cinci numere pe un cerc, există două numere care sunt vecine pe cerc şi al căror produs este mai mare sau egal cu $\frac{1}{9}$.
b) Demonstraţi că pentru orice cinci numere reale nenegative cu suma 1, există un mod de a le aşeza pe un cerc astfel încât produsul oricăror două numere vecine pe cerc este mai mic sau egal cu $\frac{1}{9}$.

antrenament pentru EGMO 2020, *Italia*

Soluţie:
a) Putem lua numerele $0, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}$. Oricum le-am aşeza pe un cerc, vor exista doi de $\dfrac{1}{3}$ vecini. Produsul acestora va fi $\dfrac{1}{9}$.
b) Dacă $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ sunt cele cinci numere, le aranjăm pe cerc în ordinea $a - e - b - c - d - a$. Cele mai mari produse sunt cd şi be, celelalte fiind clar mai mici. Arătăm că fiecare din cele două produse este mai mic sau egal cu $\dfrac{1}{9}$.
Avem $c + d + e \leq 1$ şi $c \leq d \leq e$, deci $c + d \leq \dfrac{2}{3}$. Atunci $\sqrt{cd} \leq \dfrac{c+d}{2} \leq \dfrac{1}{3}$.
Avem $be = b(1 - a - b - c - d) \leq b(1 - 0 - b - b - b) = b(1 - 3b) \leq \dfrac{1}{9}$, ultima inegalitate fiind $27b^2 - 9b + 1 \geq 0$, adică $3\left(3b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \geq 0$, evident adevărată.

Problem of the week no. 170
a) Prove that there exist five non-negative real numbers that have the following two properties: their sum is 1, and in any order we place these numbers on a circle, there are two neighboring ones whose product is at least $\frac{1}{9}$.
b) Prove that for any five non-negative real numbers whose sum is 1, there is a way of placing them on a circle such that the product of any two neighboring numbers is at most $\frac{1}{9}$.

Italian training for EGMO 2020

Solution:
a) We can take the numbers $0, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}$. In any order we might place them on the circle, there will always be two neighboring numbers that are equal to $\dfrac{1}{3}$. Their product is $\dfrac{1}{9}$.
b) If $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ are the five numbers, we arrange them on the circle in the order $a - e - b - c - d - a$. The largest products are cd and be, the other ones being clearly smaller than these two. We prove that both these products are at most $\dfrac{1}{9}$.
As $c + d + e \leq 1$ and $c \leq d \leq e$, we have $c + d \leq \dfrac{2}{3}$, hence $\sqrt{cd} \leq \dfrac{c+d}{2} \leq \dfrac{1}{3}$.

Also, $be = b(1-a-b-c-d) \leq b(1-0-b-b-b) = b(1-3b) \leq \dfrac{1}{9}$, the last inequality being equivalent to $27b^2-9b+1 \geq 0$, i.e. to $3\left(3b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \geq 0$, which is true.