Problema săptămânii 168
Pe o masă sunt 2015 monede, unele cu faţa în sus, celelalte cu faţa în jos. La pasul i trebuie să întoarcem exact i dintre monedele de pe masă. Arătaţi că după efectuarea pe rând a pasului i pentru $i = 1, 2, \ldots, 2015$ putem întotdeauna face fie ca toate monedele să fie cu faţa în sus, fie ca toate monedele să fie cu faţa în jos, dar nu putem ambele.

baraj Arabia Saudită, 2015

Soluţia 1:
În total întoarcem $1 + 2 + \ldots + 2015 = 2015 \cdot 1008$ monede, adică un număr par. Monedele pe care le-am întors de un număr par de ori vor fi în aceeaşi poziţie ca la început, iar cele pe care le-am întors de un număr impar de ori vor fi în poziţie inversă. Deoarece am întors un număr par de monede, paritatea numărului de monede care sunt cu faţa în sus nu s-a schimbat. Dacă la început am avut un număr par de asemenea monede, nu putem face ca la sfârşit toate monedele să fie cu faţa în sus (ar fi 2015 cu faţa în sus, adică un număr impar). Dacă la început am avut un număr impar de asemenea monede, nu putem face ca la sfârşit toate monedele să fie cu faţa în jos (ar fi 0 cu faţa în sus, adică un număr par). Aşadar, nu putem ajunge la ambele configuraţii.

În continuare demonstrăm că putem ajunge la una dintre ele. Vom demonstra prin inducţie după n că dacă pe masă sunt $2n + 1$ monede, după efectuarea unor paşi $1, 2, \ldots, 2n + 1$ putem face ca toate monedele să fie aranjate la fel.
Pentru $n = 0$ afirmaţia este evidentă.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru $n - 1$ (adică pentru $2n - 1$ monede pe masă), să o demonstrăm pentru n. Dacă pe masă există şi monede cu faţa în sus şi monede cu faţa în jos, aleg câte una din fiecare. Potrivit ipotezei de inducţie, pot face paşi $1, 2, \ldots, 2n - 1$ astfel încât celelate $2n - 1$ monede să fie la fel aranjate. Împreună cu cele două monede pe care le-am separat, am acum $2n$ monede aranjate într-un fel şi ultima monedă aranjată invers. Aplic pasul $2n$ asupra celor $2n$ monede orientate la fel, apoi pasul $2n + 1$ asupra tuturor monedelor şi astfel toate monedele vor fi la fel orientate.
Dacă la început toate monedele sunt la fel ordonate, efectuez paşii $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ asupra primelor i monede, iar paşii $i \in \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n + 1\}$ asupra ultimelor i monede. Împreună, pasul k şi pasul $2n + 1 - k$ întorc toate monedele, deci primii $2n$ paşi întorc toate monedele de câte n ori, prin urmare toate monedele vor fi întoarse de $n + 1$ ori, adică vor rămâne la fel orientate.
Aceasta încheie inducţia.

Soluţia 2: (user *chaotik_iak* pe AoPS)
La fel ca mai sus se arată că nu pot fi atinse ambele configuraţii.
Pentru a arăta că una dintre configuraţii poate fi mereu atinsă, să observăm că ordinea efectuării paşilor nu este importantă: dacă inversăm ordinea a doi paşi, efectul cumulat al acestora este acelaşi. Ca mai sus, se constată că dacă la început am un număr impar de monede cu faţa în sus, configuraţia la care vrem să ajungem

este cea cu toate monedele în sus, iar dacă iniţial avem un număr par de monede cu faţa în sus, atunci configuraţia la care vrem să ajungem este cea cu toate monedele cu faţa în jos. Să presupunem că ne aflăm în prima situaţie, cea de-a doua fiind similară. Efectuăm paşii în ordine inversă. Începem cu pasul 2015 şi întoarcem toate monedele. Dacă ultima monedă este cu faţa în sus (aşa cum trebuie să rămână la final), întoarcem la pasul 2014 primele 2014 monede. În caz contrar, întoarcem ultimele 2014 monede. De acum, ultima monedă e în poziţia în care trebuie să fie şi nu ne vom mai atinge de ea. La pasul 2013 ne uităm la penultima monedă: dacă este cu faţa în sus, întoarcem primele 2013 monede, dacă nu, întoarcem primele 2012 şi pe cea de-a 2014-a. Astfel, după pasul 2013 ultimele două monede sunt în poziţia în care trebuie să rămână. Nu ne mai atingem de ele. Continuând în acest fel vom putea face ca toate monedele să fie cu faţa în sus.

Problem of the week no. 168
There are 2015 coins on a table. For $i = 1, 2, \ldots, 2015$ in succession, one must turn over exactly i coins. Prove that it is always possible either to make all of the coins face up or to make all of the coins face down, but not both.

Saudi Arabia TST, 2015

For a solution in English, see AoPS.