Problema săptămânii 77
Fie a, b, c, d numere reale pozitive astfel încât $abcd = 1$. Arătaţi că

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d.$$

Mihai Onucu Drîmbe, RMT nr. 1/1985

O soluţie poate fi găsită aici. (problema 18, pagina 13)
Problema este inegalitatea 126 din cartea lui **M. O. Drîmbe** − *Inegalităţi - idei şi metode*, unde are aceeaşi soluţie. Metoda fiind instructivă, vă sfătuiesc să parcurgeţi şi celelalte exemple din respectivul capitol al cărţii.

Soluţia 2: (*Marius Stănean*)
Inegalitatea mai poate fi scrisă astfel

$$\frac{a^3}{cd} + \frac{b^3}{da} + \frac{c^3}{ab} + \frac{d^3}{bc} \geq a + b + c + d,$$

şi aceasta rezultă prin însumarea următoarelor inegalităţi ce se obţin din inegalitatea mediilor:

$$\frac{a^3}{cd} + c + d \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{cd} \cdot cd} = 3a,$$
$$\frac{b^3}{da} + d + a \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{da} \cdot da} = 3b,$$
$$\frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot ab} = 3c,$$
$$\frac{d^3}{bc} + b + c \geq 3\sqrt[3]{\frac{d^3}{bc} \cdot bc} = 3d.$$

Soluţia 3: (*Marius Stănean*)
Cu ajutorul inegalităţii Hölder generalizate avem
$$(a^4b + b^4c + c^4d + d^4a)(c + d + a + b)(d + a + b + c)(a + b + c + d)(a + b + c + d)$$
$$\geq \left(\sqrt[5]{a^4bcda^2} + \sqrt[5]{b^4cdab^2} + \sqrt[5]{c^4dabc^2} + \sqrt[5]{d^4abcd^2}\right)^5 = (a + b + c + d)^5,$$
deci concluzia.

Soluţia 4: (*Vlad Vergelea, Victor Popescu*)
Folosind că $abcd = 1$, inegalitatea de demonstrat se rescrie echivalent

$$\frac{a^3}{cd} + \frac{b^3}{da} + \frac{c^3}{ab} + \frac{d^3}{bc} \geq a + b + c + d.$$

Din inegalitatea CBS avem $\dfrac{a^4}{acd} + \dfrac{b^4}{dab} + \dfrac{c^4}{abc} + \dfrac{d^4}{bcd} \geq \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{abc + bcd + cda + dab}$, deci este suficient să demonstrăm că $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq (a + b + c + d)(abc + bcd +$

$cda + dab)$.

Această din utimă inegalitate se obţine adunând inegalitatea $\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} \geq a^2bc$ cu analoagele ei (sunt 12 asemenea inegalităţi) şi cu $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

Altă finalizare: Din cunoscuta inegalitate $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ rezultă $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ care, adunată cu analoagele şi cu $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$ conduce la concluzie.

Remarcă: Inegalitatea

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq (a + b + c + d)(abc + bcd + cda + dab)$$

revine, în termeni de sume Muirhead, la

$$\frac{1}{6}[4, 0, 0, 0] + \frac{1}{2}[2, 2, 0, 0] \geq \frac{1}{2}[2, 1, 1, 0] + \frac{1}{6}[1, 1, 1, 1]$$

care rezultă imediat din inegalităţile $[4, 0, 0, 0] \geq [1, 1, 1, 1]$ şi $[2, 2, 0, 0] \geq [2, 1, 1, 0]$.

Problem of the week no. 77

Let a, b, c, d be positive real numbers satisfying $abcd = 1$. Prove that

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d.$$

Mihai Onucu Drîmbe, RMT no. 1/1985

A solution can be found here. (problem 18, page 13)