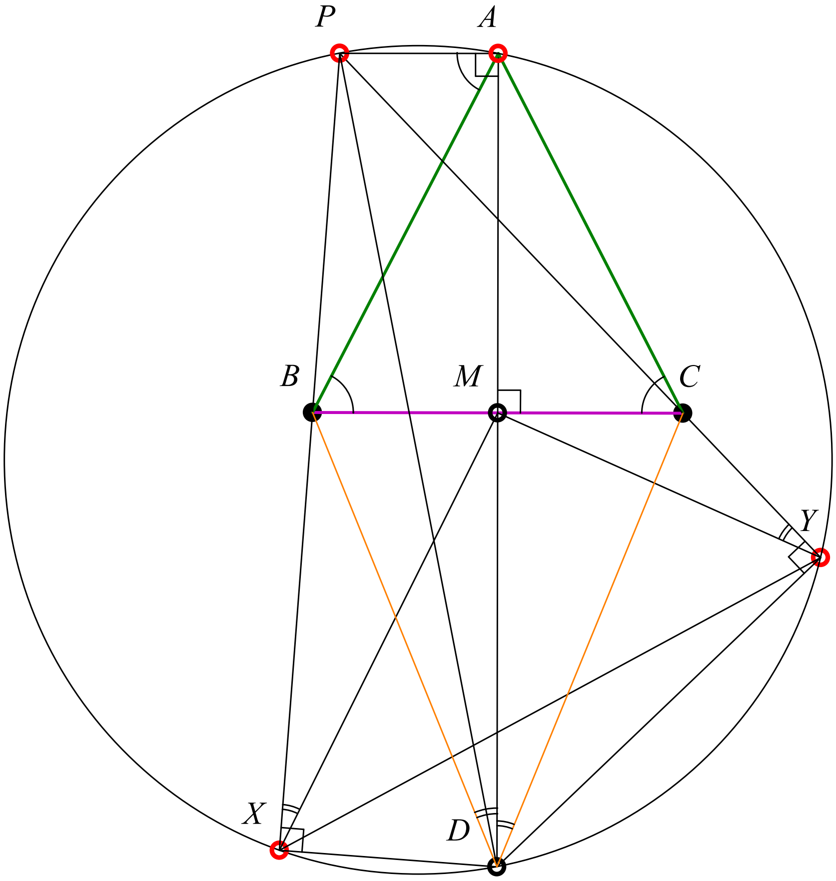
Problema săptămânii 169:

Fie ABC un triunghi cu $[AB] \equiv [AC]$ şi fie $M-$ mijlocul laturii $[BC]$. Fie P un punct pentru care $|PB| < |PC|$ şi $PA \parallel BC$. Pe dreptele PB şi PC se consideră punctele X, respectiv Y, astfel încât $B \in (PX), C \in (PY)$ şi $\widehat{PXM} \equiv \widehat{PYM}$. Arătaţi că $APXY-$este un patrulater inscriptibil.



SOLUŢIE-prin reciprocă (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $Y-$ cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei PC cu cerctraul circumscris triunghiului APX (v.Fig); întrucât acest punct $Y-$ este unic, problema revine la a arăta doar, că: $\boxed{\widehat{PXM} \equiv \widehat{PYM}}$. (Într-adevăr, dacă $Y' \in (CY)$, atunci în virtutea teoremei unghiului exterior am avea: $\widehat{PY'M} > \widehat{PYM} \equiv \widehat{PXM}$; iar dacă $Y \in (CY')$, atunci în virtuiatea aceleaşi teoreme, avem: $\widehat{PY'M} < \widehat{PYM} \equiv \widehat{PXM}$).

Notând acum cu $D-$ cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei AM, cu cercul circumscis triunghiului APX, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}[AB]\equiv[AC]\,(ip)\\ [MB]\equiv[MC]\,(ip)\end{array}\right\} \Rightarrow AD\left(=AM\right)\perp BC\ (1) \\ AP \parallel BC\ (ip) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp AP. \quad (2)$$

Relaţia (2) ne arată că $[PD]-$ este diametru în $\odot APX$ şi cum: $X, Y \in \odot APX \Rightarrow \begin{cases} PX \perp XD; & (3) \\ PY \perp YD. & (4) \end{cases}$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{r}[AB]\equiv[AC]\,(ip)\\ AD\perp BC\ (1)\end{array}\right\} \Rightarrow ABDC - deltoid \Rightarrow \widehat{MDB} \equiv \widehat{MDC}. \quad (5)$$

În fine, din:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AD \perp BC\ (1)\\ PX \perp XD\ (3)\end{array}\right\} \Rightarrow MBXD - inscriptibil \Rightarrow \widehat{PXM} \equiv \underline{\widehat{BDM}}\\ \underline{\widehat{BDM}} \equiv \underline{\underline{\widehat{MDC}}}\ (5)\\ \left.\begin{array}{r}AD \perp BC\ (1)\\ PY \perp YD\ (4)\end{array}\right\} \Rightarrow MDYC - inscriptibil \Rightarrow \underline{\underline{\underline{\widehat{MDC}}}} \equiv \widehat{PYM}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\widehat{PXM} \equiv \widehat{PYM}}. \blacksquare$$