Mathematical Danube Competition

October 26 th 2019

Subiectul 1

Rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia $x^2(x^2+1) = 21^y - 1$.

Lucian Petrescu

Soluţie: (Lucian Petrescu) Putem observa că $y \in \mathbb{N}$, iar daca (x_0, y_0), atunci şi $(-x_0, y_0)$ este soluţie a ecuaţiei. În plus $(0,0)$ este soluţie. Rescriem ecuaţia $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 21^y$. Se observă că $x^2 - x + 1$ şi $x^2 + x + 1$ sunt coprime. Va rezulta că $x^2 - x + 1 = 1$ şi $x^2 + x + 1 = 21^y$ cu soluţia $(0,0)$ sau $x^2 - x + 1 = 3^y$ şi $x^2 + x + 1 = 7^y$. Din prima relaţie avem $(2x-1)^2 = 3(4 \cdot 3^{y-1} - 1)$, adică $3 \mid (2x-1)^2$, mai mult $9 \mid (2x-1)^2$, deci $9 \mid (4 \cdot 3^{y-1} - 1)$ care dă soluţia $y = 1$, apoi $x = 2$. Aşadar mulţimea soluţiilor este $(-2,1), (0,0), (2,1)$.■

Subiectul 2

Să se arate că pentru orice numere reale $a_1, a_2, ..., a_n, n \in \mathbb{N}^*$, există un număr real x astfel încât numerele $x + a_1, x + a_2, ..., x + a_n$ să fie iraţionale.

(***)

Soluţie: (Cristian Mangra) Presupunem că există un număr iraţional y astfel încât cel puţin unul din numerele $ky + a_1, ky + a_2, ..., ky + a_n$ este raţional, oricare $k \in \{1, 2, ..., n+1\}$. Aplicând principiul cutiei, există cel puţin un număr natural $p \in \{1, 2, ..., n\}$ şi numerele distincte $i, j \in \{1, 2, ..., n+1\}$ astfel încât $iy + a_p, jy + a_p$ sunt raţionale, deci şi $(i-j)y$ este raţional, deci y este raţional. Contradicţie■

Subiectul 3

Scriem pe o linie 51 de numere naturale nenule cu suma lor egală cu 100. Arătaţi că pentru orice număr natural k, $1 \le k \le 99$, există câteva numere scrise consecutiv pe linie având suma egală cu k sau 100-k.

(***)

Soluţie: (Cristian Mangra) Fie $a_1, a_2, ..., a_{51}$ cele 51 de numere cu $a_1 + a_2 + ... + a_{51} = 100$. Pe un cerc cu lungimea egală cu 100 eşezăm 100 de puncte astfel încât lungimea oricărui arc determinat de două puncte vecine (dintre acestea) să fie egală cu 1. Fixăm un punct, dintre acestea, pe care îl notăm cu A_1, apoi marcăm pe cerc punctele $A_2, A_3, ..., A_{51}$ astfel încât măsura arcului mic A_iA_{i+1} să fie egală cu a_i, pentru oricare $i = \overline{1,50}$. Evident că lungimea arcului $A_{51}A_1$ este a_{51}. Vom colora aceste 51 de puncte cu albastru, iar celelalte 49 cu roşu. Vom arăta că pentru orice număr natural k de la 1 la 99 există $i, j \in \{1,2,...,99\}$ astfel încât lungimea arcului mic A_iA_j sau a arcului mare A_iA_j este k sau $100-k$. Pentru $k = 50$, avem 51 de puncte colorate cu albastru, prin urmare cel puţin două dintre ele sunt diametral opuse, ceea ce rezolvă problema. Pentru $k \in \{1,2,..,49\}$ vom considera punctele A_i cu $i = \overline{1,51}$ fiind mijloacele celor 51 de arce de lungime $2k$. Dacă vreunul din capetele acestor arce este colorat în albastru, problema este rezolvată. Vom presupune că toate aceste capete sunt colorate cu roşu. Cum fiecare dintre acestea este considerat de cel mult două ori, rezultă că cel puţin 51 dintre cele 100 sunt colorate cu roşu, contradicţie. Cazul în care $k \in \{51,52,...99\}$ este similar cu cel de mai sus.■

Subiectul 4

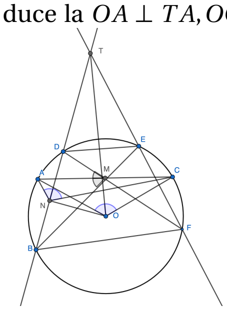
Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$, iar M şi N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Să se demonstreze că dacă măsurile unghiurilor AMB şi AMD sunt egale, atunci măsurile unghiurilor ANB şi BNC sunt egale.

(***)

Soluţie: (Cristian Mangra) **Lemă:** *Fie $ABCD$ un trapez isoscel înscris în cercul $\mathscr{C}$, M punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD, iar T punctul de intersecţie al laturilor neparalelele AD şi BC. Dacă paralela prin M la AB intersectează cercul $\mathscr{C}$ în E şi F, atunci TE este tangentă la cercul $\mathscr{C}$.*

Demonstraţie: Evident, T, M, O sunt coliniare. Apoi, $m(\widehat{AOT}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ADB}) = \frac{1}{2}(360° - m(\widehat{AB}) = 180° - m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{TCA})$, ceea ce conduce spre $TCOA$ inscriptibil. Din puterea punctului M faţă de cercul circumscris triunghiului AOC obţinem $OM \cdot MT = MC \cdot MA$, dar $MC \cdot MA = ME \cdot MF = ME^2$. Prin urmare $ME^2 = OM \cdot MT$ şi folosind reciproca teoremei înălţimii obţinem $TE \perp OE$, adică TE tangentă la $\mathscr{C}$. ★

Notăm cu E şi F punctele în care dreptele BM şi DM taie a doua oară cercul circumscris patrulaterului $ABCD$. Deoarece M este mijlocul diagonalei AC, iar măsurile unghiurilor AMB şi AMD sunt egale, rezultă că $BFED$ este trapez isoscel şi $AC \parallel BF \parallel DE$. Vom nota cu T intersecţia dreptelor BD şi EF, rezultă din lemă că TA şi TC sunt tangente cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ de centru O. Asta va duce la $OA \perp TA, OC \perp TC$.



Cum N este mijlocul lui BD, obţinem $ON \perp BD$. Aşadar punctele T, A, N, O, C sunt conciclice, prin urmare $\widehat{AND} \equiv \widehat{AOT}$ şi $\widehat{TNC} \equiv \widehat{COT}$ şi cum $\widehat{COT} \equiv \widehat{AOT}$ va rezulta $\widehat{ANT} \equiv \widehat{CNT}$. De aici vom obţine $\widehat{ANB} \equiv \widehat{BNC}$ ■