Problema săptămânii 166
Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale care satisfac $ab + bc + ca = 1$ şi

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

EGMO 2019

Soluţie:
Dacă $c = 0$, deducem că $ab = 1$ şi $a^2b = a = b$, deci $a = b = \pm 1$. Obţinem soluţiile $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ şi $(a, b, c) = (-1, -1, 0)$. Analog, în cazurile $a = 0$ şi $b = 0$ se obţin soluţiile $(a, b, c) \in \{(0, 1, 1), (0, -1, -1), (1, 0, 1), (-1, 0, -1)\}$.
În continuare căutăm soluţii cu $a, b, c \neq 0$. Avem $a^2b + c = b^2c + a \Rightarrow a^2b - a = b^2c - c$, adică $a(ab - 1) = c(b^2 - 1)$. Folosind condiţia $ab + bc + ca = 1$, egalitatea precedentă revine la $a(bc+ca) = c(1-b^2)$. Cum $c \neq 0$ obţinem $ab+a^2 = 1-b^2$, adică $a^2 + b^2 = 1 - ab = ac + bc$. Analog obţinem că $b^2 + c^2 = ab + ac$ şi $c^2 + a^2 = ab + bc$. Adunând aceste trei egalităţi obţinem că $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca)$, adică $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$. Rezultă că $a = b = c$ şi atunci din condiţia $ab + bc + ca = 1$ obţinem $a = b = c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Aşadar, soluţiile sunt:
$(a, b, c) \in \big\{(1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, -1, -1), \big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\big), \big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\big)\big\}$.

Mai multe soluţii, în engleză, găsiţi pe pagina oficială.

Problem of the week no. 166
Find all triples (a, b, c) of real numbers such that $ab + bc + ca = 1$ and

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

EGMO 2019

The English solutions from the official website of the competition are available here.