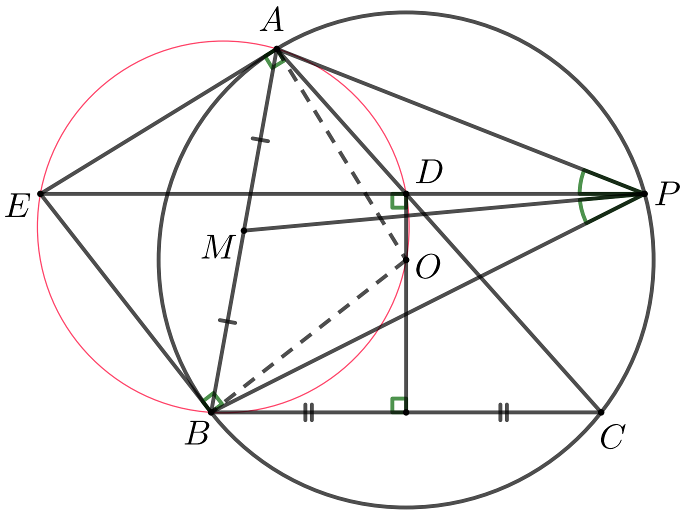
Problema săptămânii 165
Într-un triunghi ascuţitunghic ABC în care $AB < AC$, notăm cu M mijlocul laturii $[AB]$ şi cu D punctul de intersecţie a laturii $[AC]$ cu mediatoarea laturii $[BC]$. Fie P acel punct al arcului mic $\overset{\frown}{AC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC care are proprietatea că $DP \parallel BC$. Arătaţi că $\widehat{APD} \equiv \widehat{MPB}$.

Dominik Burek, Polonia (MEMO 2019)

Soluţia 1: (*Andrei-Giovani Chiriţă, David Andrei Anghel*)
Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi E punctul de intersecţie a tangentelor în A şi B la acest cerc.
$DO \perp BC \Rightarrow m(\widehat{CDO}) = 90° - m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABO}) \Rightarrow A, B, O, D$ sunt conciclice.
$m(\widehat{OAE}) = m(\widehat{OBE}) = 90° \Rightarrow AOBE$ inscriptibil, deci punctele A, B, O, E, D sunt conciclice. Rezultă că $m(\widehat{ODE}) = 90°$, deci $DE \parallel BC$, prin urmare punctele P, D, E sunt coliniare.
Cum PE este dreapta suport a simedianei din P a triunghiului APB, obţinem $\widehat{APD} \equiv \widehat{MPB}$.

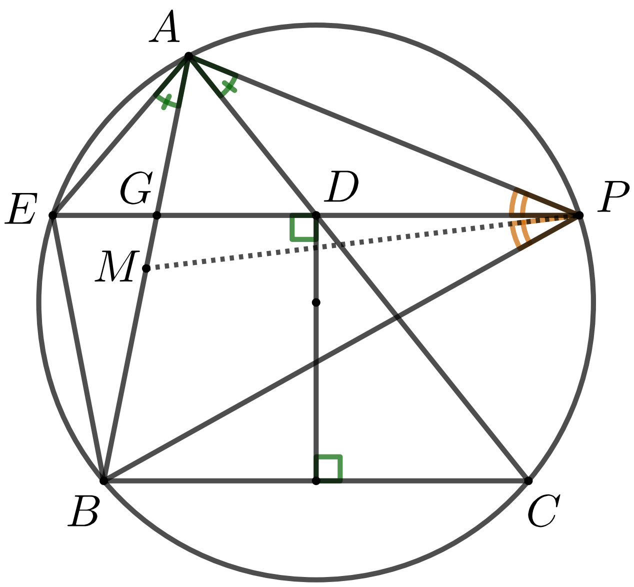


O soluţie asemănătoare (*Mircea Fianu*)
Ca şi în soluţia 1, E este intersecţia tangentelor în punctele A şi B la cercul (ABC). Triunghiurile isoscele BDC şi BEA sunt asemenea (au $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BAE}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AB})$). Deducem că $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BEA})$, deci patrulaterul $AEBD$ este inscriptibil. Prin urmare, $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{DBC}) = \underbrace{m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{PDC})}_{\text{alterne interne}}$.

Deci punctele P, D, E sunt coliniare, situate pe simediana din P a triunghiului PAB. Rezultă concluzia.

Soluţia 2: (*Ioana Stănoiu*)
Fie G şi E punctele în care semidreapta $(PD$ intersectează AB, respectiv cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci $ED = DP$. Deoarece $PE \parallel BC$, avem

$\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle EAB$. Aşadar (AD) este mediană în triunghiul AEP, iar (AG), izogonala ei, este simediană. Asta înseamnă că patrulaterul $EAPB$ este armonic, deci şi (PG) este simediană în triunghiul APB, de unde concluzia.



S-au folosit următoarele rezultate teoretice foarte utile:

Definiţie: Se numeşte *patrulater armonic* un patrulater inscriptibil $ABCD$ în care $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Teorema 1: Într-un patrulater armonic $ABCD$ în care $\{M\} = AC \cap BD$, segmentele (AM), (BM), (CM), (DM) sunt simediane în triunghiurile ABD, BCA, CDB, respectiv DAC.

Teorema 2: Dacă într-un patrulater inscriptibil în care $\{M\} = AC \cap BD$, segmentul (AM) este simediană în triunghiul ABD, atunci patrulaterul este armonic.

Încercaţi să demonstraţi singuri aceste două teoreme.
Indicaţie pentru Teorema 1: Folosiţi relaţia lui Steiner.
Indicaţie pentru Teorema 2: Dacă P este mijlocul lui (BC), avem $\Delta ACP \sim \Delta ADP$ şi $\Delta BAP \sim \Delta CAD$, de unde $AD \cdot BC = AC \cdot PD = AC \cdot PB = AB \cdot CD$.

Problem of the week no. 165
Let ABC be an acute-angled triangle such that $AB < AC$. Let D be the point of intersection of the perpendicular bisector of the side BC with the side AC. Let P be a point on the shorter arc AC of the circumcircle of the triangle ABC such that $DP \parallel BC$. Finally, let M be the midpoint of the side AB. Prove that $\angle APD = \angle MPB$.

Dominik Burek, Polonia (MEMO 2019)

Solution: (*Andrei-Giovani Chiriţă, David Andrei Anghel*)
Let O be the circumcenter of triangle ABC and let E be the intersection point of the tangents at A and B to the circumcircle. Then:
$DO \perp BC \Rightarrow \angle CDO = 90° - \angle ACB = \angle ABO \Rightarrow ABOD$ cyclic.
Also, $\angle OAE = \angle OBE = 90° \Rightarrow A, O, B, E$ are conyclic, which means that points A, B, O, E, D are concyclic. It follows that $\angle ODE = 90°$, hence $DE \parallel BC$, i.e. points P, D, E are collinear.
As PE is the support line of the symmedian from P of triangle APB, we get that $\angle APD = \angle MPB$.