Problema săptămânii 164
La un turneu de şah participă 20 de jucători. În prima rundă fiecare jucător dispută câte o partidă. În runda a doua, fiecare jucător joacă împotriva unui jucător cu care nu a jucat în runda anterioară. Demonstraţi că, după cea de-a doua rundă, există un grup format din 10 jucători care nu au jucat încă între ei.

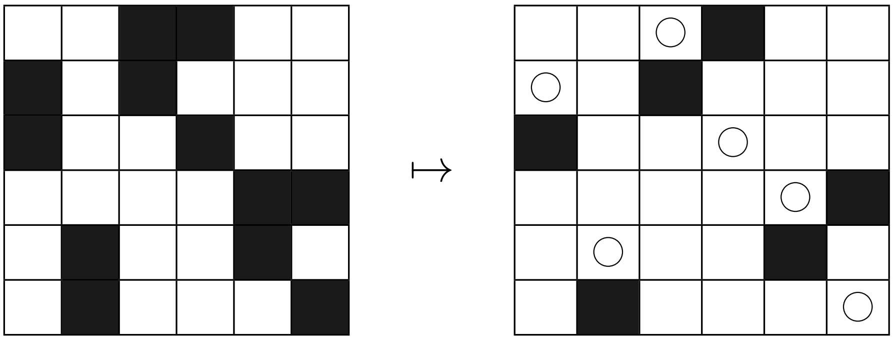
Soluţie:
Aşezăm jucătorii pe un cerc şi unim cu un segment roşu oricare doi şahişti care au jucat unul împotriva celuilalt în runda 1 şi cu un segment albastru oricare doi şahişti care au jucat între ei în runda a doua. Fiecare şahist este capătul unui segment roşu şi al unuia albastru (diferit de cel roşu). Pornim de la un jucător şi formăm o linie poligonală în care alternăm segmentele albastre şi cele roşii, începând cu unul albastru. Deoarece numărul şahiştilor este finit, la un moment dat vom ajunge înapoi la un şahist pe la care am mai fost. Dar în afară de primul, la ceilalţi ajung deja două segmente, câte unul din fiecare culoare, deci nu mai există alte segmente care să ajungă la ei. Aşadar, linia poligonală se închide obligatoriu la şahistul de la care am pornit şi obligatoriu cu un segment roşu. Aşadar, linia poligonală constă dintr-un număr par de segmente. Dacă ea conţine mai puţin de 20 de vârfuri, adică există şahişti pe la care nu a trecut linia poligonală, luăm unul dintre aceşti şahişti şi facem o nouă linie poligonală, cu aceleaşi reguli (albastru-roşu-albastru-roşu...). Descompunem astfel mulţimea şahiştilor în cicluri de lungime pară. Dacă din fiecare ciclu luăm şahiştii din 2 în 2, vom avea în total 10 şahişti care nu au jucat între ei.

O altă problemă pe aceeaşi idee, cu două soluţii explicate de *Dan Schwarz*:

Unele celule ale unui tablou de dimensiuni $n \times n$, $n \geq 2$, sunt colorate în negru, astfel încât fiecare linie şi fiecare coloană conţine exact două celule negre. Demonstraţi că putem înălbi unele dintre aceste celule negre, astfel încât fiecare linie şi fiecare coloană să conţină în final exact o celulă neagră.

prelucrare *Dan Schwarz*

Soluţie: (*Dan Schwarz*)
Vom crea un graf având drept vârfuri cele $2n$ celule negre, şi drept muchii – muchii roşii între celulele negre aflate pe o aceeaşi linie, şi muchii albastre între celulele negre aflate pe o aceeaşi coloană. Prin urmare graful este 2-regulat, deci este o reuniune de cicluri disjuncte. Fiecare ciclu este de lungime pară, cu muchiile de culori alternate.
Nu ne rămâne decât să înălbim, în fiecare ciclu, din două în două vârfuri; de exemplu



Desigur, putem alege în mod arbitrar, în fiecare ciclu, de unde să începem înălbirea. ■

Soluţie Alternativă. (*Dan Schwarz*)
Creăm un graf bipartit având drept vârfuri cele n linii, respectiv cele n coloane, cu câte o muchie între fiecare linie şi coloană la intersecţia cărora se află o celulă neagră. Prin urmare graful este 2-regulat, şi atunci un caz particular al Lemei Mariajelor a lui Hall (cunoscut deja lui Frobenius) implică existenţa unui cuplaj (1-factor) perfect. Înălbim celelalte celule negre, care nu corespund muchiilor din acest cuplaj.
Această soluţie funcţionează şi într-un caz mai general, unde în loc de 2 avem câte $2 \leq k \leq n$ celule negre pe fiecare linie şi coloană. Graful este acum k-regulat, dar metoda ciclurilor nu mai funcţionează în mod direct pentru $k > 2$. ■

Problem of the week no. 164
A chess tournament has 20 players and 19 rounds in which each player plays against each of the other 19 players exactly once. (Every player plays one game in each round.) Prove that, after the second round, there is a group of 10 players that have not played a game between them.

Solution:
We arrange the players on a circle and join with a red segment any two players that opposed each other in round 1, and with a blue segment any two players having met in round 2. Each player is at the end of one red and one blue segment. Starting from one of the players, we construct a broken line consisting of segments of alternating colors. The number of players being finite, our broken line must eventually return to a player it has already visited. But for all of them we have used up the two segments linking them to the others, with the exception of the first player, the one we started with. Moreover, if we start with a red segment, we finish with a blue one, hence our broken line consists of an even number of segments. If it has less than 20 vertices, in other word if there are players that do not belong to this broken line, we consider one such player and construct another broken line according to the same rule. Thus, we decompose the set of the players into cycles of even lengths. If we take from each cycle every other player, the 10 players that we selected are

not joined by segments, which means they have not met during the first two rounds.

A similar problem:

Some of the cells of an $n \times n$ table, $n \geq 2$, are colored black such that each line and each column contains exactly two black cells. Prove that we can turn white some of these black cells such that each line and each column contains in the end exactly one black cell.

adapted by *Dan Schwarz*