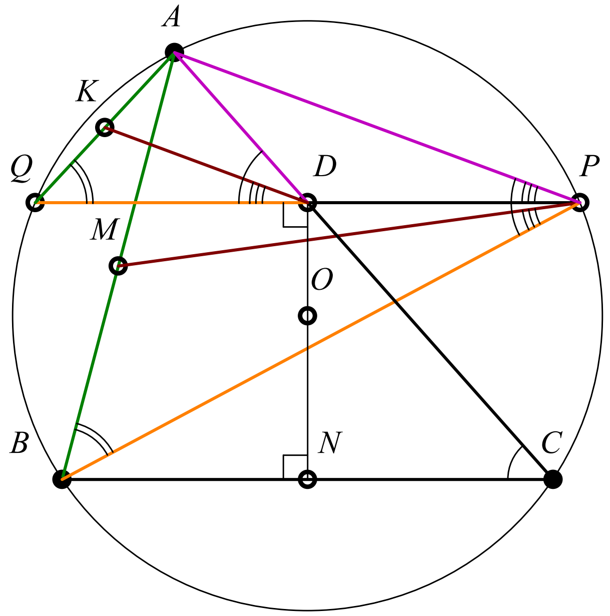
Problema T5 (Middle European Mathematical Olympiad, din 20 aug.2019):

Într-un triunghi ABC ***în care*** $|AB|<|AC|$, ***notăm cu*** M ***– mijlocul laturii*** $[AB]$ ***şi cu*** D ***– punctul de intersecţie al laturii*** $[AC]$, ***cu mediatoarea laturii*** $[BC]$; ***iar cu*** P ***– acel punct al arcului mic*** $\overset{\frown}{AC}$ ***– al cercului circumscris triunghiului*** ABC, ***care are proprietatea, că:*** $DP \parallel BC$. ***Arătaţi că:*** $\widehat{APD} \equiv \widehat{MPB}$.



SOLUŢIE (Mihai Miculiţa): Notând cu Q – cel de al doilea punct de intersecţie dreptei DP, cu cercul circumscris triunghiului ABC (v.Fig.), avem:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} PQ \parallel BC \Rightarrow \widehat{QDA} \equiv \underline{\widehat{BCA}} \\ ABCD - inscriptibil \Rightarrow \underline{\widehat{BCA}} \equiv \widehat{BPA} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{QDA} \equiv \widehat{BPA} \\ AQBP - inscriptibil \Rightarrow \widehat{AQD} \equiv \widehat{ABP} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AQD \sim \Delta ABP. \quad (1)$$

Pe de altă parte, notând acum cu K şi N – mijloacele laturilor $[AQ]$ şi respectiv $[BC]$; iar cu O – centrul cercului circumscris ΔABC, avem:

$$\left.\begin{array}{r} [NB] \equiv [NC] \\ DN \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow O \in DN \perp [PQ] \Rightarrow [DP] \equiv [DQ]. \quad (2)$$

În fine, punctele K şi D – fiind mijloacele a două laturi omoloage ale triunghiurilor:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta AQD \sim \Delta ABP \ (1) \Rightarrow \Delta KQD \sim \Delta MBP \Rightarrow \underline{\widehat{QDK}} \equiv \widehat{BPM} \\ \left.\begin{array}{r} [KA] \equiv [KQ] \\ [DP] \equiv [DQ] \ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow KD \parallel AP \Rightarrow \underline{\widehat{QDK}} \equiv \widehat{DPA} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\widehat{BPM} \equiv \widehat{DPA}}. \blacksquare$$