Problema săptămânii 163
Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

Olimpiadă Belarus, 2007

Soluţia 1: Ecuaţia se scrie $(n^2+n+1)(n^3-n+1) = 7^m$. Rezultă că atât n^2+n+1 cât şi n^3-n+1 trebuie să fie puteri ale lui 7. Fie $d = (n^2+n+1,\ n^3-n+1)$. Atunci d divide fiecare din numerele: n^3-n+1, n^2+n+1, $n(n^2+n+1)-(n^3-n+1) = n^2+2n-1$, $n^2+2n-1-(n^2+n+1) = n-2$, $n^2+n+1-n(n-2) = 3n+1$ şi $3n+1-3(n-2) = 7$. Avem două cazuri: $d = 1$ sau $d = 7$.
1. Dacă $d = 1$ atunci $n^2+n+1 = 1$ sau $n^3-n+1 = 1$, dar ambele situaţii conduc la contradicţie.
2. Dacă $d = 7$ atunci $n^2+n+1 = 7$ sau $n^3-n+1 = 7$. Obţinem $n = 2$, deci singura soluţie este $(n, m) = (2, 2)$.

Soluţia 2: (*Ioana Stănoiu*)
Ecuaţia din enunţ se poate scrie $(n^2+n+1)(n^3-n+1) = 7^m$. Atunci $n^2+n+1 = 7^a$ şi $n^3-n+1 = 7^b$, cu $a \leq b$ pentru $n \geq 2$. Cum pentru $n = 1$ nu avem soluţie, în continuare considerăm $n \geq 2$. Avem $7^a \mid n^3-1$ şi $7^a \mid n^3-n+1$, de unde $7^a \mid n-2$. Dar $7^a = n^2+n+1 > n-2$, deci trebuie ca $n-2 = 0$, adică $n = 2$. Pentru $n = 2$ se obţine $m = 2$, astfel că $n = m = 2$ este singura soluţie a ecuaţiei.

Problem of the week no. 163
Solve in positive integers the equation $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

Belarus National Olympiad, 2007

Solution 1: The equation can be written as $(n^2+n+1)(n^3-n+1) = 7^m$. So both n^2+n+1 and n^3-n+1 must be some powers of 7. Put $d = (n^2+n+1,\ n^3-n+1)$. Then d is a divisor of n^3-n+1, n^2+n+1, $n(n^2+n+1)-(n^3-n+1) = n^2+2n-1$, $n^2+2n-1-(n^2+n+1) = n-2$, $n^2+n+1-n(n-2) = 3n+1$ and $3n+1-3(n-2) = 7$. We have two cases: $d = 1$ or $d = 7$.
1. If $d = 1$ then either $n^2+n+1 = 1$, or $n^3-n+1 = 1$, both of which yielding a contradiction.
2. If $d = 7$ then either $n^2+n+1 = 7$, or $n^3-n+1 = 7$ or both of them equal 7. We obtain $n = 2$, so the only solution is $(n, m) = (2, 2)$.
Solution 2: (*Ioana Stănoiu*)
The given equation can be written $(n^2+n+1)(n^3-n+1) = 7^m$. It follows that $n^2+n+1 = 7^a$ and $n^3-n+1 = 7^b$, with $a \leq b$ if $n \geq 2$. As $n = 1$ does not lead to a solution, we consider $n \geq 2$. We have $7^a \mid n^3-1$ and $7^a \mid n^3-n+1$, hence $7^a \mid n-2$. But $7^a = n^2+n+1 > n-2$, so we need $n-2 = 0$, i.e. $n = 2$. For $n = 2$ we get $m = 2$, therefore $n = m = 2$ is the only solution of the equation.