Problema săptămânii 162
Arătaţi că dacă $a, b, c, d \in [1, 3]$, atunci $(a + b + c + d)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

Vasile Cârtoaje şi Mircea Lascu

Soluţia 1:
Considerăm trinomul de gradul II $f(x) = 4x^2-4(a+b+c+d)x+3(a^2+b^2+c^2+d^2)$. El se scrie şi $f(x) = (x-a)(x-3a)+(x-b)(x-3b)+(x-c)(x-3c)+(x-d)(x-3d)$. Deoarece $a, b, c, d \leq 3$, dar $3a, 3b, 3c, 3d \geq 3$, avem $f(3) \leq 0$, fiecare din cei patru termeni ai sumei de mai sus fiind negativ sau nul. Cum $f(0) > 0$, deducem că f are rădăcini, adică $\Delta \geq 0$, inegalitate echivalentă cu concluzia problemei.

Soluţia 2:
Pentru $b, c, d \in [1, 3]$ fixate, notăm $g(a) = a^2-a(b+c+d)+b^2+c^2+d^2-bc-cd-db$, $\forall\, a \in [1, 3]$. Avem de demonstrat că $g(a) \leq 0$, $\forall\, a \in [1, 3]$, adică tot intervalul $[1, 3]$ este cuprins între rădăcinile lui g. Este necesar şi suficient să arătăm că $g(1) \leq 0$ şi $g(3) \leq 0$. Notând $h(b) = b^2 - (c + d + 1)b + c^2 + d^2 - cd - c - d + 1$ şi $p(b) = b^2 - (c + d + 3)b + c^2 + d^2 - cd - 3c - 3d + 9$, avem de demonstrat că $h(b) \leq 0$ şi $p(b) \leq 0$, $\forall\, b \in [1, 3]$. Este necesar şi suficient să demonstrăm aceste inegalităţi pentru $b \in \{1, 3\}$. Continuând să fixăm rând pe rând câte una din variabile, constatăm că este suficient să demonstrăm inegalitatea din enunţ pentru $a, b, c, d \in \{1, 3\}$, lucru extrem de uşor. Egalitatea are loc atunci când trei dintre numere sunt egale cu 1 şi cel de-al patrulea este 3.

Soluţia 3: (*Carol Luca Gasan, Andrei-Giovani Chiriţă*)
Inegalitatea se poate scrie $(a+b+c+d)^2-12(a+b+c+d)+48 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)-12(a+b+c+d)+48$, sau $(a+b+c+d-6)^2+12 \geq 3[(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2]$. Dar $(a + b + c + d - 6)^2 + 12 \geq 12$ (cu egalitate dacă $a + b + c + d = 6$), iar $a \in [1, 3] \Rightarrow a - 2 \in [-1, 1] \Rightarrow (a - 2)^2 \leq 1$, care, împreună cu analoagele, implică $3[(a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 + (d - 2)^2] \leq 3 \cdot 4 = 12$ (cu egalitate dacă $a, b, c, d \in \{1, 3\}$).
În concluzie, avem $(a+b+c+d-6)^2+12 \geq 12 \geq 3[(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2]$, iar egalitate în inegalitatea din enunţ are loc dacă $a = b = c = 1$, $d = 3$ şi pentru permutările acestora.

Soluţia 4: (*Daniel Văcaru*)
Este cunoscută inegalitatea lui *Kantorovici*[1]:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2,$$

pentru orice $x_i, y_i > 0$ cu $0 < m \leq \dfrac{x_i}{y_i} \leq M$, $\forall\, i = \overline{1, n}$.
Aplicând această inegalitate pentru $n = 4$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$, $y_1 = y_2 = Y_3 = y_4 = 1$, $m = 1$, $M = 3$, obţinem

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq \frac{16}{12} \cdot (a + b + c + d)^2,$$

de unde $(a + b + c + d)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

[1] vezi **M.O. Drîmbe** – *Inegalităţi, idei şi metode*, Ed. GIL, 2003, pag. 40

Problem of the week no. 162
Prove that $(a+b+c+d)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$ for all $a, b, c, d \in [1, 3]$.

Vasile Cârtoaje and Mircea Lascu

Solution 1:
Consider $f(x) = 4x^2 - 4(a+b+c+d)x + 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$. We can write it also as $f(x) = (x-a)(x-3a) + (x-b)(x-3b) + (x-c)(x-3c) + (x-d)(x-3d)$. Since $a, b, c, d \leq 3$, but $3a, 3b, 3c, 3d \geq 3$, we have $f(3) \leq 0$, each of the four terms above being either negative or zero. As $f(0) > 0$, it follows that f does have real roots, i.e. $\Delta \geq 0$, inequality which is equivalent to the required one.
Solution 2:
For $b, c, d \in [1, 3]$ fixed, denote $g(a) = a^2 - a(b+c+d) + b^2 + c^2 + d^2 - bc - cd - db$, $\forall\, a \in [1, 3]$. We have to prove that $g(a) \leq 0$, $\forall\, a \in [1, 3]$, i.e. the whole interval $[1, 3]$ lies between the roots of g. It is both necessary and sufficient to prove that $g(1) \leq 0$ and $g(3) \leq 0$. Denoting $h(b) = b^2 - (c+d+1)b + c^2 + d^2 - cd - c - d + 1$ and $p(b) = b^2 - (c+d+3)b + c^2 + d^2 - cd - 3c - 3d + 9$, we have to prove that $h(b) \leq 0$ and $p(b) \leq 0$, $\forall\, b \in [1, 3]$. Again, it is necessary and sufficient to prove them for $b \in \{1, 3\}$. Continuing to fix the variables one by one, we find that it is sufficient to prove the inequality in the case when $a, b, c, d \in \{1, 3\}$, which is extremely easy. Equality holds when three of the variables are equal to 1, while the fourth one is 3.
Solution 3: (*Carol Luca Gasan, Andrei-Giovani Chiriță*)
Write the inequality as $(a+b+c+d)^2 - 12(a+b+c+d) + 48 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2) - 12(a+b+c+d) + 48$, or $(a+b+c+d-6)^2 + 12 \geq 3[(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (d-2)^2]$. We have $(a+b+c+d-6)^2 + 12 \geq 12$ (with equality if $a+b+c+d = 6$), while $a \in [1, 3] \Rightarrow a - 2 \in [-1, 1] \Rightarrow (a-2)^2 \leq 1$, which, together with its analogues, leads to $3[(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (d-2)^2] \leq 3 \cdot 4 = 12$ (with equality when $a, b, c, d \in \{1, 3\}$).
In conclusion, we have $(a+b+c+d-6)^2 + 12 \geq 12 \geq 3[(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (d-2)^2]$, and the equality holds when $a = b = c = 1$, $d = 3$ as well as for the permutations of this quadruple.
Solution 4: (*Daniel Văcaru*)
We use the following inequality due to *Kantorovici*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2,$$

for all $x_i, y_i > 0$ such that $0 < m \leq \dfrac{x_i}{y_i} \leq M$, $\forall\, i = \overline{1, n}$.
Applying this inequality for $n = 4$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$, $y_1 = y_2 = Y_3 = y_4 = 1$, $m = 1$, $M = 3$, yields

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq \frac{16}{12} \cdot (a+b+c+d)^2,$$

i.e. $(a+b+c+d)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$.