Problema săptămânii 159
Arătaţi că:
a) Există o infinitate de triplete de numere naturale nenule m, n, p astfel încât $4mn - m - n = p^2 - 1$.
b) Nu există numere naturale nenule m, n, p astfel încât $4mn - m - n = p^2$.

lista scurtă OIM, 1984

Souţie:
a) Pentru $n = 1$ ecuaţia devine $3m = p^2$, aşa că putem lua $p = 3k$, $m = 3k^2$ pentru a obţine câte o soluţie de forma $(3k^2, 1, 3k)$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Să presupunem că $4mn - m - n = x^2$, $x \in \mathbb{N}^*$. Înmulţind cu 4 şi adunând 1, obţinem $(4m-1)(4n-1) = 4x^2+1$. Deoarece $4m-1 \equiv 3 \pmod 4$, el trebuie să aibă un factor prim p congruent cu 3 modulo 4. Se ştie că dacă un număr prim de forma $4k+3$ divide o sumă de două pătrate atunci el divide fiecare din cele două pătrate. Atunci $p \mid 4x^2+1$ implică $p \mid 2x$ şi $p \mid 1$, dar ultima relaţie conduce la o contradicţie.

Problem of the week no. 159
Prove:
a) There are infinitely many triples of positive integers m, n, p such that $4mn - m - n = p^2 - 1$.
b) There are no positive integers m, n, p such that $4mn - m - n = p^2$.

IMO ShortList, 1084

Solution:
a) Take $n = 1$; the equation becomes $3m = p^2$, so we can take $p = 3k$, $m = 3k^2$ to get a solution $(3k^2, 1, 3k)$ for every positive integer k.
b) Assume $4mn - m - n = x^2$, $x \in \mathbb{N}$. If we multiply by 4 and than add 1, we get $(4m-1)(4n-1) = 4x^2 + 1$. Now, because $4m - 1 \equiv 3 \pmod 4$, there must be a prime factor p of $4m - 1$ such that $p \equiv 3 \pmod 4$. We get $p \mid 4x^2 + 1$ which now by well known theorem implies $p \mid 2x$ and $p \mid 1$, but the last condition leads to a contradiction.