BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 13 ianuarie 2018 (barajul 1)

Problema 1. O şcoală are 218 elevi. Un sondaj realizat la şcoală a scos la iveală că:
i. 140 de elevi au bicicletă,
ii. 159 de elevi au telefon mobil,
iii. 181 de elevi au minge de fotbal şi
iv. 176 de elevi au un PC.
Care este numărul minim de elevi despre care se poate afirma cu certitudine că au şi bicicletă, şi telefon mobil, şi minge de fotbal şi şi PC?

Problema 2. Fie
$$A = \frac{m}{n} + \frac{14n}{9m},$$
unde m şi n numere naturale nenule prime între ele. Determinaţi toate perechile (m, n) pentru care A este număr natural.

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $CA = CB$. Fie d_1 şi d_2 bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle CAB$ şi $\sphericalangle CBA$. Din vârful C ducem perpendicularele e_1 şi e_2 pe dreptele d_1, respectiv d_2. Ele intersectează bisectoarele d_1 şi d_2 în punctele Z, respectiv H. Fie F şi I punctele de intersecţie a dreptelor e_1 şi e_2 cu dreapta AB. Dacă K şi N sunt mijloacele segmentelor $[FH]$, respectiv $[IZ]$, arătaţi că:
a) patrulaterul $ZHIF$ este trapez isoscel;
b) $(CKN) = (ZKNH)$.
Notă: Cu (T) s-a notat aria figurii T.

Problema 4. Fie a şi b numere reale astfel încât
$$a^3 + b^3 + 9ab = 27.$$
Aflaţi toate valorile posibile ale sumei $s = a + b$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. O şcoală are 218 elevi. Un sondaj realizat la şcoală a scos la iveală că:
i. 140 de elevi au bicicletă,
ii. 159 de elevi au telefon mobil,
iii. 181 de elevi au minge de fotbal şi
iv. 176 de elevi au un PC.
Care este numărul minim de elevi despre care se poate afirma cu certitudine că au şi bicicletă, şi telefon mobil, şi minge de fotbal şi şi PC?

Soluţie: Fie A, B, C şi D mulţimea elevilor care au bicicletă, telefon mobil, minge de fotbal şi respectiv PC. Notăm cu E mulţime tuturor elevilor din şcoală. Avem:
$card(A) + card(B) = 140 + 159 = 299$ şi $card(E) = 218$
Astfel, cel puţin $299 - 218 = \mathbf{81}$ de elevi au şi bicicletă şi telefon mobil; (1)
$card(C) + card(D) = 181 + 176 = 357$ şi $card(E) = 218$
Astfel, cel puţin $357 - 218 = \mathbf{139}$ de elevi au şi minge şi PC; (2)
Fie $F = A \cap B$ şi $G = C \cap D$.
Atunci relaţiile (1) şi (2) implică:
$card(F) + card(G) \geq 81 + 139 = 220$ şi $card(E) = 218$,
prin urmare cel puţin $220 - 218 = 2$ elevi posedă toate cele patru articole.

Soluţie neoficială: Sunt $218 - 140 = 78$ de elevi fără bicicletă, $218 - 159 = 59$ fără mobil, $218 - 181 = 37$ fără minge şi $218 - 176 = 42$ fără celular. Admiţând că toţi aceşti elevi sunt diferiţi, sunt cel mult $78 + 59 + 37 + 42 = 216$ elevi cărora le lipseşte ceva, deci sunt minim 2 care le au pe toate.

Problema 2. Fie

$$A = \frac{m}{n} + \frac{14n}{9m},$$

unde m şi n numere naturale nenule prime între ele. Determinaţi toate perechile (m, n) pentru care A este număr natural.

Soluţie: $A = \dfrac{m}{n} + \dfrac{14n}{9m} = \dfrac{9m^2 + 14n^2}{9mn}$ (1)
Din (1) rezultă că:
$a \mid 9a^2 + 14b^2 \Rightarrow a \mid 14b^2$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $a \mid 14 \Rightarrow a \in \{1, 2, 7, 14\}$.
$b \mid 9a^2 + 14b^2 \Rightarrow b \mid 9a^2$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $b \mid 9 \Rightarrow b \in \{1, 3, 9\}$. (2)
$9 \mid 9a^2 + 14b^2 \Rightarrow 9 \mid 14b^2$ şi, cum $(9, 14) = 1$, rezultă $9 \mid b^2$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă că b poate fi 3 sau 9.

$a = 1$ şi $b = 3 \Rightarrow A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{14 \cdot 3}{9 \cdot 1} = 5 \in \mathbb{Z}$, deci $(a, b) = (1, 3)$ e soluţie;

$a = 1$ şi $b = 9 \Rightarrow A = \dfrac{1}{9} + \dfrac{14 \cdot 9}{9 \cdot 1} = 14\dfrac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$;

$a = 2$ şi $b = 3 \Rightarrow A = \dfrac{2}{3} + \dfrac{14 \cdot 3}{9 \cdot 2} = 3 \in \mathbb{Z}$, deci $(a, b) = (2, 3)$ e soluţie;

$a = 2$ şi $b = 9 \Rightarrow A = \dfrac{2}{9} + \dfrac{14 \cdot 9}{9 \cdot 2} = 7\dfrac{2}{9} \notin \mathbb{Z}$;

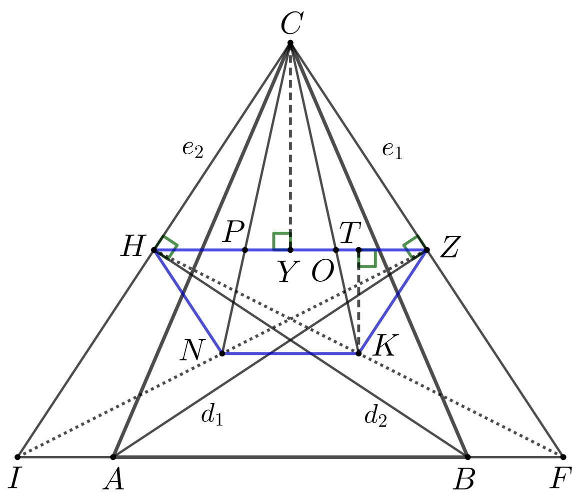
$a = 7$ şi $b = 3 \Rightarrow A = \dfrac{7}{3} + \dfrac{14 \cdot 3}{9 \cdot 7} = 3 \in \mathbb{Z}$, deci $(a, b) = (7, 3)$ e soluţie;

$a = 7$ şi $b = 9 \Rightarrow A = \dfrac{7}{9} + \dfrac{14 \cdot 9}{9 \cdot 7} = 2\dfrac{7}{9} \notin \mathbb{Z}$;

$a = 14$ şi $b = 3 \Rightarrow A = \dfrac{14}{3} + \dfrac{14 \cdot 3}{9 \cdot 14} = 5 \in \mathbb{Z}$, deci $(a, b) = (14, 3)$ e soluţie;

$a = 14$ şi $b = 9 \Rightarrow A = \dfrac{14}{9} + \dfrac{14 \cdot 9}{9 \cdot 14} = 2\dfrac{5}{9} \notin \mathbb{Z}$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $CA = CB$. Fie d_1 şi d_2 bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle CAB$ şi $\sphericalangle CBA$. Din vârful C ducem perpendicularele e_1 şi e_2 pe dreptele d_1, respectiv d_2. Ele intersectează bisectoarele d_1 şi d_2 în punctele Z, respectiv H. Fie F şi I punctele de intersecţie a dreptelor e_1 şi e_2 cu dreapta AB. Dacă K şi N sunt mijloacele segmentelor $[FH]$, respectiv $[IZ]$, arătaţi că:
a) patrulaterul $ZHIF$ este trapez isoscel;
b) $(CKN) = (ZKNH)$.
Notă: Cu (T) s-a notat aria figurii T.



Soluţie: a) Triunghiul BIC este isoscel pentru că BH este înălţime şi bisectoare, deci este şi mediană, deci H este mijlocul lui $[CI]$. Analog, Z este mijlocul lui

$[CF]$. Atunci $ZH \parallel CI$. (1)
Avem: $BI = BC$, $AF = AC$, $BC = AC$, de unde $BI = AF$, deci $AI = BF$. Triunghiurile CIA şi CFB sunt congurente căci $AI = BF$, $CA = CB$ şi $\sphericalangle CAI \equiv \sphericalangle CBF$.
Rezultă $CI = CF \Rightarrow \dfrac{CI}{2} = \dfrac{CF}{2} \Rightarrow HI = ZF$. (2)
Din (1) şi (2) rezultă că $ZHIF$ este trapez isoscel.

b) Fie $\{P\} = CN \cap ZH$ şi $\{O\} = CK \cap ZH$. Atunci

$$ZK \overset{\parallel}{=} \frac{CH}{2} \Rightarrow OH = 2 \cdot OZ.$$

$HN \overset{\parallel}{=} \dfrac{CZ}{2} \Rightarrow ZP = 2 \cdot PH$. Aşadar, avem $OZ = PH = \dfrac{ZH}{3} = PO$.
Ducem perpendicularele CY şi KT pe ZH, $Y, T \in ZH$. Atunci $CY = 2 \cdot KT$ şi avem

$$\begin{aligned}(ZKNH) = 2(ZKO) + (OPNK) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ZO \cdot KT + (OPNK) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ZO \cdot CY + (OPNK) \\ &= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot CY + (OPNK) \\ &= (CPO) + (OPNK) \\ &= (CKN)\end{aligned}.$$

Problema 4. Fie a şi b numere reale astfel încât

$$a^3 + b^3 + 9ab = 27.$$

Aflaţi toate valorile posibile ale sumei $s = a + b$.

Soluţie: Fie $s = a + b$ şi $p = a \cdot b$. Atunci

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 27 - 9ab + 3ab(a+b) \Rightarrow$$

$$s^3 = 27 - 9p + 3ps \Rightarrow s^3 - 27 + 9p - 3ps = 0 \Rightarrow$$

$$(s-3)(s^2+3s+3) - 3p(s-3) = 0 \Rightarrow (s-3)(s^2+3s+9-3p) = 0.$$

Aşadar avem fie $\boxed{s=3}$, fie $s^2 + 3s + 9 - 3p = 0 \Rightarrow s^2 + 3s + 9 = 3p$. $(*)$
Avem $s^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab = 4p \Rightarrow p \leq \dfrac{s^2}{4}$.
Dar, conform $(*)$, avem atunci $s^2 + 3s + 9 \leq \dfrac{3s^2}{4} \Rightarrow 4s^2 + 12s + 36 \leq 3s^2 \Rightarrow$

$$s^2 + 12s + 36 \leq 0 \Rightarrow (s+6)^2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{s=-6}.$$

Conchidem că s poate fi -6 sau 3.

Soluţie: (neoficială)
Folosind relaţia $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ pentru $c = -3$, ştim din ipoteză că $a^3 + b^3 - (-3)^3 - 3 \cdot a \cdot b \cdot (-3) = 0$ şi deducem că $a + b - 3 = 0$ sau $a^2 + b^2 + (-3)^2 - ab - a \cdot (-3) - b \cdot (-3) = 0$. În primul caz avem $a + b = 3$, în cel de-al doilea avem $a = b = -3$, deci $a + b = -6$. Ambele situaţii sunt posibile, deci mulţimea valorilor posibile ale lui s este $\{-6, 3\}$.