BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 6 mai 2017 (barajul 4)

Problema 1. Se dă ecuaţia $x^3 - 12x + 8 = 0 \quad (1)$.
Dacă numărul $2017x_1$ este o soluţie a ecuaţiei (1), arătaţi că numărul

$$x_2 = \frac{4034x_1 - 4}{2017x_1}$$

este de asemenea o soluţie a ecuaţiei (1).

Problema 2. Fie ABC un triunghi. Pe laturile (AB) şi (AC) se consideră punctele K, respectiv N, astfel încât $KB = KN$. Bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele C şi P. Perpendiculara din P pe AB intersectează segmentul (BN) în D.
Demonstraţi că $\sphericalangle KDA \equiv \sphericalangle KNA$.

Problema 3. Scriem pe tablă numerele $a_1 = 2015$, $b_1 = 2016$ şi $c_1 = 2017$. Cineva joacă un joc care constă din paşi de tipul celor de mai jos:
Pasul 1: El şterge două dintre numerele a_1, b_1, c_1 (să zicem a_1 şi b_1) şi în locul lor scrie pe tablă numerele $a_2 = 2a_1 - b_1$ şi $b_2 = 2b_1 - a_1$.
Astfel, pe tablă vor figura numerele a_2, b_2, c_1.
Pasul 2: El şterge două dintre numerele a_2, b_2, c_1 (să zicem b_2 şi c_1) şi în locul lor scrie pe tablă numerele $b_3 = 2c_1 - b_2$ şi $c_2 = 2c_1 - b_2$.
Astfel, pe tablă vor figura numerele a_2, b_3, c_2.
El continuă să efectueze astfel de paşi. Stabiliţi dacă este posibil ca, după un număr de asemenea paşi, să se ajungă în situaţia ca două dintre cele trei numere de pe tablă să fie egale cu 0.

Problema 4. Determinaţi toate numerele, n, de patru cifre care au proprietatea că numerele n^2 şi n^3 (scrise în baza 10) au aceleaşi ultime patru cifre, dar acestea sunt diferite de numărul n (adică dacă n^2 şi n^3 se termină în $\overline{abcd}$, atunci $\overline{abcd} \neq n$).

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Se dă ecuaţia $x^3 - 12x + 8 = 0 \quad (1)$.
Dacă numărul $2017x_1$ este o soluţie a ecuaţiei (1), arătaţi că numărul

$$x_2 = \frac{4034x_1 - 4}{2017x_1}$$

este de asemenea o soluţie a ecuaţiei (1).

Soluţie: Deoarece numărul $2017x_1$ este o soluţie a ecuaţiei (1), avem

$$(2017x_1)^3 - 12(2017x_1) + 8 = 0 \qquad (2).$$

Trebuie să demonstrăm că

$$x_2^3 - 12x_2 + 8 = 0.$$

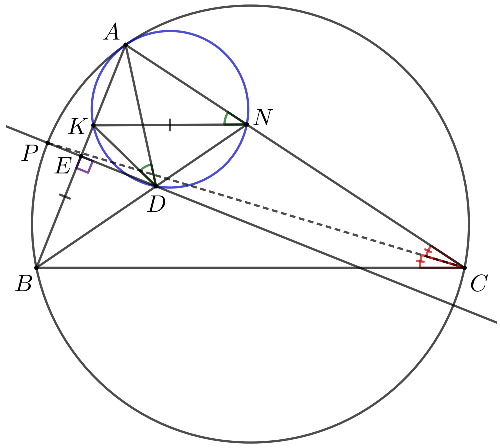
Avem:

$$\begin{aligned}
x_2^3 - 12x_2 + 8 &= \left(\frac{4034x_1 - 4}{2017x_1}\right)^3 - 12\left(\frac{4034x_1 - 4}{2017x_1}\right) + 8 \\
&= \left(2 - \frac{4}{2017x_1}\right)^3 - 12\left(2 - \frac{4}{2017x_1}\right) + 8 \\
&= 8 - 12 \cdot \frac{4}{2017x_1} + 6 \cdot \frac{4^2}{(2017x_1)^2} - \frac{4^3}{(2017x_1)^3} - 24 + \frac{48}{2017x_1} + 8 \\
&= -8 + \frac{96}{(2017x_1)^2} - \frac{64}{(2017x_1)^3} = -8\left[1 - \frac{12}{(2017x_1)^2} + \frac{8}{(2017x_1)^3}\right] \\
&= -8\left[\frac{(2017x_1)^3 - 12(2017x_1) + 8}{(2017x_1)^3}\right]
\end{aligned}$$

şi, în virtutea relaţiei (2), obţinem că $x_2^3 - 12x_2 + 8 = 0$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi. Pe laturile (AB) şi (AC) se consideră punctele K, respectiv N, astfel încât $KB = KN$. Bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele C şi P. Perpendiculara din P pe AB intersectează segmentul (BN) în D.
Demonstraţi că $\sphericalangle KDA \equiv \sphericalangle KNA$.

Soluţie:



Din ipoteză avem $\sphericalangle ACP \equiv \sphericalangle PCB$, astfel că PA şi PB sunt coarde care subîntind arce egale. Aşadar, $PA = PB$, deci triunghiul PAB este isoscel. Atunci perpendiculara din vârful acestuia trece prin mijlocul bazei, adică E este mijlocul laturii (AB). Aşadar punctul D se află pe mediatoarea segmentului (AB), deci $DA = DB$. De aici, deducem că

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAK \equiv \sphericalangle DBK = \sphericalangle NBK.$$

Dar, din ipoteză, avem că $BK = KN$, deci

$$\sphericalangle NBK \equiv \sphericalangle KNB = \sphericalangle KND.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\sphericalangle KND \equiv \sphericalangle DAK.$$

Rezultă că punctele A, K, D, N sunt situate pe un cerc. Atunci $\sphericalangle HDA \equiv \sphericalangle KNA$ pentru că subîntind acelaşi arc al cercului care trece prin punctele A, K, D, N.

Problema 3. Scriem pe tablă numerele $a_1 = 2015$, $b_1 = 2016$ şi $c_1 = 2017$. Cineva joacă un joc care constă din paşi de tipul celor de mai jos:
<u>*Pasul 1:*</u> El şterge două dintre numerele a_1, b_1, c_1 (să zicem a_1 şi b_1) şi în locul lor scrie pe tablă numerele $a_2 = 2a_1 - b_1$ şi $b_2 = 2b_1 - a_1$.
Astfel, pe tablă vor figura numerele a_2, b_2, c_1.
<u>*Pasul 2:*</u> El şterge două dintre numerele a_2, b_2, c_1 (să zicem b_2 şi c_1) şi în locul lor scrie pe tablă numerele $b_3 = 2c_1 - b_2$ şi $c_2 = 2c_1 - b_2$.
Astfel, pe tablă vor figura numerele a_2, b_3, c_2.
El continuă să efectueze astfel de paşi. Stabiliţi dacă este posibil ca, după un număr de asemenea paşi, să se ajungă în situaţia ca două dintre cele trei numere

de pe tablă să fie egale cu 0.

Soluţie:[1] Vom arăta că acest lucru este imposibil.
Să observăm că, iniţial, suma numerelor scrise pe tablă este:
$a_1 + b_1 + c_1 = 2015 + 2016 + 2017 = 2016 - 1 + 2016 + 2016 + 1 = 3 \cdot 2016.$
După *primul pas*, ea devine

$$a_2 + b_2 + c_1 = 2a_1 - b_1 + 2b_1 - a_1 + c_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 3 \cdot 2016.$$

După *al doilea pas*, ea devine

$$a_2 + b_3 + c_2 = 2a_1 - b_1 + 2b_2 - c_1 + 2c_1 - b_2 = 2a_1 - b_1 + 2(2b_1 - a_1) + c_1 - 2b_1 + a_1 =$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 3 \cdot 2016.$$

Astfel, observăm că după fiecare pas suma numerelor de pe tablă rămâne neschimbată; ea va fi mereu $3 \cdot 2016$.
Astfel, pentru a ajunge la situaţia dorită, va trebui ca numerele pe tablă să fie

$$0,\ 0,\ 3 \cdot 2016.$$

Apoi, observăm că, modulo 4, suma pătratelor numerelor de pe tablă rămâne neschimbată: suma pătratelor numerelor de pe tablă este mereu un număr de forma *multiplu de* $4 + 2$.
Într-adevăr, $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2015^2 + 2016^2 + 2017^2 = (2 \cdot 1008 - 1)^2 + (2 \cdot 1008)^2 + (2 \cdot 1008 + 1)^2 = M_4 + 2$ adică $2 \pmod 4$.
După *primul pas*, $a_2^2 + b_2^2 + c_1^2 = (2a_1 - b_1)^2 + (2b_1 - a_1)^2 + c_1^2 = M_4 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$ şi $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \equiv 2 \pmod 4$.
Analog, vedem că după *al doilea pas* avem $a_2^2 + b_3^2 + c_2^2 \equiv 4 \pmod 2$.
Dar, dacă la un moment dat am scrie pe tablă numerele $0, 0, 3 \cdot 2016$, atunci am avea $0^2 + 0^2 + (3 \cdot 2016)^2 = 4 \cdot (3 \cdot 1008)^2 \equiv 0 \pmod 4$, ceea ce, am văzut mai sus, nu este posibil.

Problema 4. Determinaţi toate numerele, n, de patru cifre care au proprietatea că numerele n^2 şi n^3 (scrise în baza 10) au aceleaşi ultime patru cifre, dar acestea sunt diferite de numărul n (adică dacă n^2 şi n^3 se termină în $\overline{abcd}$, atunci $\overline{abcd} \neq n$).

Soluţie: Dacă numerele n^2 şi n^3 au aceleaşi ultime patru cifre, atunci diferenţa lor este un număr divizibil cu $10000 = 16 \cdot 625 = 2^4 \cdot 5^4$. Atunci

$$n^3 - n^2 = M_{10000} \text{ adică } n^3 - n^2 \equiv 0 \pmod{10000}.$$

[1] O soluţie mai simplă constă în a observa că parităţile numerelor de pe tablă nu se schimbă: vom avea mereu două numere impare şi unul par, deci nu vom putea avea două numere egale cu 0.

În acest caz, ceea ce ne dorim, este ca

$$n^3 - n^2 \equiv 0 \pmod{10000} \text{ şi } n^2 \not\equiv n \pmod{10000},$$

adică

$$n^3 - n^2 = n^2(n-1) \equiv 0 \pmod{10000} \text{ şi } n^2 - n = n(n-1) \not\equiv 0 \pmod{10000},$$

deci $16 \mid n^2(n-1)$ şi $625 \mid n^2(n-1)$ dar nu simultan $16 \mid n(n-1)$ şi $625 \mid n(n-1)$. Deoarece $(n^2, n-1) = (n, n-1) = 1$ (prime între ele), vrem ca $16 \mid n^2$ sau $16 \mid n-1$ şi $625 \mid n^2$ sau $625 \mid n-1$ fără ca $16 \mid n$ sau $16 \mid n-1$ şi, simultan, $625 \mid n$ sau $625 \mid n-1$.
Distingem atunci patru cazuri:
Cazul I: $625 \mid n^2$ şi $16 \mid n^2$.
Atunci $25 \mid n$ şi $4 \mid n$, deci $100 \mid n$. Aşadar n este de forma $\overline{ab00}$. Toate aceste numere îndeplinesc condiţia din enunţ: n^2 şi n^3 se termină cu 0000, iar n nu.
Cazul II: $625 \mid n-1$ şi $16 \mid n^2$.
Rezultă că $4 \mid n$. De asemenea, este necesar şi suficient ca $16 \nmid n$, altminteri vom avea $10000 \mid n^2 - n$. Din $n-1 = 625k$ şi $4 \mid n$ rezultă că $k \equiv 3 \pmod{4}$. Obţinem $n \in \{1876, 4376, 6876, 9376\}$. Numai primele trei verifică $16 \nmid n$, deci numai acestea convin.
Cazul III: $625 \mid n^2$ şi $16 \mid n-1$.
Atunci $25 \mid n$. Pentru ca $4 \mid n-1$ şi $25 \mid n$ trebuie ca ultimele două cifre ale lui n să fie 25, iar pentru ca $8 \mid n-1$ trebuie ca, în plus, cifra sutelor să fie pară. Impunând apoi condiţia ca $16 \mid n-1$ obţinem numerele: 1025, 3025, 5025, 7025, 9025, 2225, 4225, 6225, 8225, 1425, 3425, 5425, 7425, 9425, 2625, 4625, 6625, 8625, 1825, 3825, 5825, 7825 şi 9825. Niciunul dintre aceste numere nu are proprietatea că $625 \mid n$, deci toate aceste numere convin.
Cazul IV: $625 \mid n-1$ şi $16 \mid n-1$.
În acest caz rezultă că $10000 \mid n-1$, dar nu există niciun număr de patru cifre cu această proprietate.
În concluzie, numerele căutate sunt:

1000, 1100, 1200, ..., 9900,
1876, 4376,6876,
1025, 1425, 1825, 2225, 2625, 3025, 3425, 3825, 4225, 4625, 5025, 5425, 5825,
6225, 6625, 7025, 7425, 7825, 8225, 8625, 9025, 9425, 9825.